利用RBF神经网络实现高斯型函数积分

杨　军[1,2]，　马晓岩[1]，　万山虎[1]，　江　晶[1]
(1. 空军雷达学院，武汉　430019;2. 空军工程大学 导弹学院，陕西 三原　713800)

摘　要:导出了在一定精度下高斯型函数积分近似表达式,利用径向基函数(RBF)网络具有良好的逼近任意非线性映射的特点,提出了一种改进的RBF网络方法以实现对高斯型函数积分。实验结果表明所提出方法具有较高的逼近计算精度。

关键词:径向基函数;神经网络;高斯函数;函数积分
中图分类号:TN015　　**文献标识码:**A　　**文章编号:**1009-3516(2003)05-0020-04

在雷达检测处理、通信调制方式的误差分析等问题中,最终归结为求解高斯型函数积分问题。由于高斯型函数积分不能用解析式表示,为此,本文首先导出了在一定精度下该函数积分的近似表达式,然后,利用RBF具有良好的逼近任意非线性映射、处理系统内在难以解析表达的规律性能力和较快的学习收敛速度等特点[1-2],提出了利用径向基函数(RBF)神经网络计算该积分的方法。另外,考虑到高斯型积分函数特点,对该方法进行了两点改进,其一为利用积分函数的偶对称特点,将训练区间缩减一半以节省径向基函数的学习时间。其二为利用积分函数为单调上升函数,且积分上限(下限为-∞)远离0值时输出值趋向恒定值的特点,即两个积分上限越远离0值时,积分输出值之间的范数越小,从而在计算除训练点外的其它上限的积分值时,RBF网络输出与积分真值之间存在较大误差。为克服此问题,本文提出了在RBF进行训练之前先对输出值进行非线性映射的改进RBF方法,以实现函数积分的精确逼近。最后,对所提方法进行了仿真,结果表明所提方法可得到较高的精度。

1　一定精度下高斯型函数积分的近似表达式

标准高斯型函数$f(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$的积分表达式为

$$G(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi \tag{1}$$

由于式(1)没有解析表达式,为获得对它的积分值,下面导出其在一定精度范围内较小积分区间的表示式。而标准高斯型函数在区间(-∞,+∞)上的积分为1,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)d\xi=1 \tag{2}$$

利用函数的偶对称特点,可得

$$\int_{-\infty}^{0}f(\xi)d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi=\frac{1}{2} \tag{3}$$

另外,式(1)可表示为

收稿日期:2003-01-06
基金项目:国家"863"高技术研究发展计划资助项目(2002AA135320)
作者简介:杨　军(1973-),男,云南大理人,博士生,主要从事信号智能处理、检测与估计研究;
马晓岩(1962-),男,湖北莆圻人,教授,主要从事信号检测与估计研究;
万山虎(1954-),男,安徽庐江人,教授、博士生导师,主要从事信号检测与处理研究.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi \tag{4}$$

由于存在下列不等式

$$I_{M\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{M}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{M}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-x^2}dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{M}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{\frac{Mx}{\sqrt{2}}}dx = \frac{\sqrt{2}}{M\sqrt{\pi}}e^{-\frac{M^2}{2}} \tag{5}$$

故当要求精度 $I_{M\infty} < 10^{-6}$时,经计算可得当 $M \geqslant 5$ 时,$\frac{\sqrt{2}}{M\sqrt{\pi}}e^{-\frac{M^2}{2}} = 5.946\,9 \times 10-7$,所以

$$I_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{5} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{5}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{5} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi \tag{6}$$

从而

$$I_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{5} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi = \frac{1}{2} \tag{7}$$

同理可得

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_2}^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leqslant \\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_2}^{x_1} e^{-\frac{x_2 x}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \frac{\sqrt{2}}{x_2\sqrt{\pi}}(e^{-\frac{x_2^2}{2}} - e^{-\frac{x_1 x_2}{2}}) \end{aligned} \tag{8}$$

由于有如下不等式

$$\frac{\sqrt{2}}{x_2\sqrt{\pi}}(e^{-\frac{x_2^2}{2}} - e^{-\frac{x_1 x_2}{2}}) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{x_2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x_2^2}{2}} \tag{9}$$

当 $x_2 \geqslant 5$ 时,式(9) 右边的值不大于$5.948\,6 \times 10^{-7}$,故当I_{x_1}的精度要求在10^{-6} 内时,I_{x_1} 可用下式近似求得

$$I_{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}}dx, & x_1 < 5 \\ \frac{1}{2}, & x_2 \geqslant 5 \end{cases} \tag{10}$$

故式(1) 可等效为

$$G(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi, & x \geqslant 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{-x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi, & x \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi, & 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 1, & x > 5 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{-x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi, & -5 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0, & x < -5 \end{cases} \tag{11}$$

从上可知,可将求解高斯型积分问题按积分区间化为较简形式。并且在一定精度内,积分区间已被大大缩小,但其积分值仍不能用解析形式表示。为提高其积分运算速度与精度,本文提出采用良好的逼近任意非线性映射的径向基函数 RBF 神经网络方法对其求解。

2　改进的 RBF 网络

RBF 网络结构如图 1 所示。RBF 完成映射$f: R^n \to R$,其数学表达式为

$$f(x) = \sum_{j=1}^{M} w_j \varphi(\| x - c_j \|) \tag{12}$$

其中径向基函数采用高斯函数

$$\varphi(\| x - c_j \|) = \exp\left(\frac{-\| x - c_j \|^2}{\sigma_j^2}\right) \tag{13}$$

其中:c_j、σ_j 分别为第 j 个隐单元的中心矢量和宽度; w_j 为第 j 个隐单元到输出单元的连接权。

在本文中, n 取 1。考虑到积分 $G(x)$ 输出在 5 附近和 -5 附近时差别一般很小,如 $G(-4.5) = 1.402\,8$

$\times 10^{-6}$、$G(-4.0) = 2.967\,6 \times 10^{-5}$，$G(4.0) = 0.999\,703$、$G(4.0) = 0.999\,998\,5$，若以不同输入 x（差别相对较大）去映射相对较小值 $G(x)$（近似相等）时，据 RBF 的特点可知，网络参数由于输入向量差别不大而在训练时不会产生很大变化。从而导致通过网络映射得到的估计值与真实值之间存在较大误差。而向量之间的差别可用范数衡量，即向量之间的差别较小等效为向量间的范数较小，如范数 - 2 的值为 $\| G(-4.5) - G(-4) \| 2 = 2.827\,297\,948 \times 10^{-5}$、$\| G(4.5) - G(4) \| 2 = 2.827\,297\,949 \times 10^{-5}$，因此，要实现对不同输入向量（差别相对较大）到相对较小输出向量之间的不同更精确映射，只需将向量间范数变大即可。基于此，本文对 RBF 输出 $f(x)$ 不是直接用 $G(x)$，而是由以下非线性变换得到，即输入向量（也即积分式的上限）、输出向量 $f(x)$ 与高斯型积分 $G(x)$ 之间满足关系

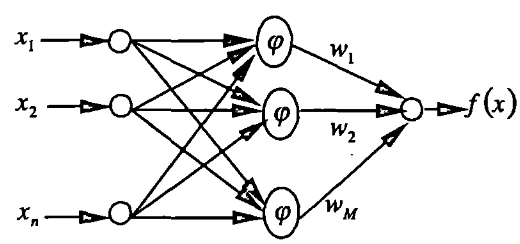

图 1 RBF 网络结构

$$f(x) = -\lg(G(x)) \tag{14}$$

从上可以看出，积分上限靠近 - 5 时的值通过式(14)变换后，其输出值之间的范数变大，这样可以实现精确的逼近。而积分上限靠近 5 时的值经式(13)变换后，其输出值之间的范数仍然很小，但可利用式(1)中的被积函数具有偶对称特点，可以通过上限为对应负值时的 RBF 输出得到，即从式(11)可以得到：当积分上限为[0,5]时的值完全可以通过积分限为[- 5,0]获得，即对于 $\forall x' \in [0,5]$，则有

$$I_x' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x'} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x'}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{15}$$

故式(11)可表示为

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{0} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi, & x \geq 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{0} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi, & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{0} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi, & 0 \leq x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{0} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi, & -5 \leq x \leq 0 \\ 0, & x < -5 \end{cases} \tag{16}$$

从式(15)可知 $\forall x'' \in [-5,0]$ $G(x'') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x''} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$，从而有 $-x'' \in [0,5]$，

$$G(-x'') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x''} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - G(x'')\right) = 1 - G(x'') \tag{17}$$

因此，径向基函数的训练只需在[- 5,0]之间，即可得到式(1)中积分上限在[- 5,5]内的任何积分值，同时，利用对称性可减少一半的训练时间，另外，积分值通过式(14)变换后作为 RBF 网络的训练输出值，这样可提高 RBF 网络在其它非训练点的输出精度。

3 实验与分析

根据前面的分析与导出结论，设计如下三方面实验，其中实验结果均以积分值进行式(14)变换、未经式(14)变换和文[3]中的方法三种情况进行比较。

实验 1：训练情况下，RBF 网络对各训练点逼近情况进行实验。

对 RBF 网络进行训练时，输入训练样本由积分上限在区间[- 5,5]中以 0.2 为间隔进行取值获得，RBF 输出由理论计算得到的积分值或在此基础上再用式(14)变换后获得，训练结果见图 2，与理论误差见图 3。从图 2 中可以看出，在训练时并且与数据未进行式(14)变换时两种方法，在各训练点处均可获得较好的逼近。但与理论值比较看，文[3]和未经线性变换方法的训练最大误差在 10^{-3} 数量级，且后者误差估计高于前者，而本文提出的方法在训练点输出均在 10^{-6} 数量级。

实验 2：对已训练好的 RBF 网络进行测试。

测试采用在积分限[- 5,5]中以 0.01 为间隔取值进行检验。测试曲线见图 4。从图中可以看出本文提出的方法得到的测试曲线能较好的与理论积分曲线重合，而未变换的测试曲线在[4,5]间有较大误差。

实验 3:利用实验 1 已训练好的网络,在雷达信号检测性能分析中应用。

根据文[3]的结论,当幅度为恒定值 A 的信号在加性高斯噪声背景下经过包络检波后得到的信号检测概率可表示为

$$P_d = F\left(\frac{A}{\sigma} - \sqrt{-2\ln P_{fa}}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{A}{\sigma}-\sqrt{-2\ln P_{fa}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \mathrm{d}\xi \tag{18}$$

其中,信噪比 SNR 为 $10\log A^2/\sigma^2$;σ^2 为噪声功率;P_{fa}为虚警概率。图 5 为 P_{fa}为 10^{-6}时采用本文方法得到的检测性能。此外,几种方法与理论计算比较的误差见图 6。从图中可以看出,本文提出的方法明显优于文[3]和未经非线性变换的方法。

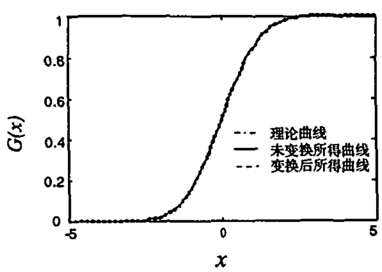

图 2　RBF 网络训练输出

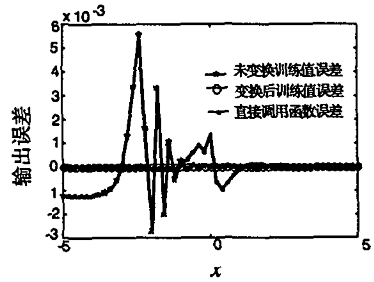

图 3　RBF 网络训练输出误差

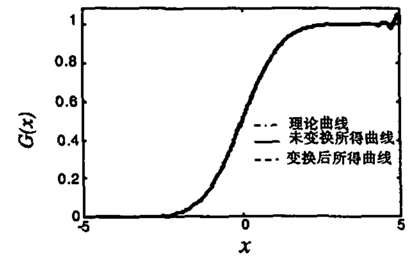

图 4　RBF 网络测试输出

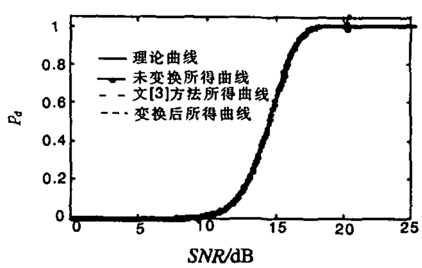

图 5　恒定幅值检测概率

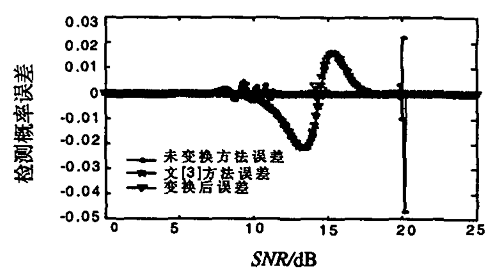

图 6　不同方法下检测概率误差

参考文献:

[1] Schilling R J, Carroll J J, Al－Ajlouni A F. Approximation of nonlinear systems with radial basis function neural networks[J]. IEEE trans. Neural Networks. 2001,12(1):1－15.

[2] Leshno M, Lin V Y, Pinkus A, et al. Multilayer feedforward networks with a nonpolynomial activation function can approximate any function[J]. IEEE trans. Neural Networks. 1993,6(1): 861－867.

[3] Mahafza B R. Radar systems analysis and design using matlab[M]. FL: CRC Press LLC, 2000.

(编辑:田新华)

Implementation for Gauss－Type Function Integral Using RBF Neural Networks

YANG Jun[1,2], MA Xiao－yan[1], WAN Shan－hu[2], JIANG Jing[1]

(1. Information Engineering Department of Air Force Radar Academic, Wuhan 430019, China; 2. Scientific Research Office of Air Force Radar Academic, Wuhan 430019, China; 3. The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China)

Abstract: First an proximate expression of Gauss type function integral is deduced with proper accuracy, and then a scheme based on modified radial basis function (RBF) neural networks is proposed. The numerical experiments indicate that the proposed scheme has a higher proximate accuracy.

Key words: radial basis function (RBF); neural networks; Gauss function; function integral