

# 有效值及有功功率测量的综合误差分析

张介秋<sup>1,2</sup>, 韩峰岩<sup>3</sup>, 冯大毅<sup>1</sup>, 陈砚圃<sup>4</sup>, 梁昌洪<sup>2</sup>

(1. 空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710051; 2. 西安电子科技大学 天线与微波国家重点实验室, 陕西 西安 710071; 3. 西安交通大学 电信学院, 陕西 西安 710049; 4. 西安通信学院, 陕西 西安 710106)

**摘要:**分析了用加权算法求有效值及有功功率时, 同步偏差及量化噪声对测量精度的影响, 得到其综合误差公式。结果表明: 随着所用权函数阶数的增加, 不同步采样引起的测量误差将快速减小以至成为次要因素, 量化误差将可能成为主要误差因素。采样数据量化引起的测量误差正比于量化精度而反比于采样点数的开方根。通过增加量化位数及采样点数均可降低数据量化引起的测量误差。

**关键词:**量化误差; 同步误差; 有效值测量; 有功功率测量; 功率因数测量; 加权算法

**中图分类号:** TM932    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1009-3516(2003)05-0016-04

通过对电压、电流波形进行采样, 并直接用采样值计算交流电的电压、电流有效值、有功功率及功率因数等参数已成为电测领域的一种重要测量方法<sup>[1]</sup>。然而采样测量周期与信号周期之间总会出现不可避免的不同步偏差。传统算法中, 由于不同步采样而导致的测量误差与同步偏差成正比<sup>[2-3]</sup>, 因此, 同步偏差是影响各电气参量测量精度的关键因素, 采取措施减少采样同步偏差成为提高测量精度重要一环<sup>[4]</sup>, 量化误差对测量精度所造成的影响往往不太受到关注。由于准同步算法<sup>[5]</sup>和其它加权算法<sup>[6-7]</sup>可以比较有效抑制采样同步偏差对测量结果的影响。在此情况下, 量化误差有可能成为影响各电气参量测量精度的主要因素。

## 1 加权算法

假定电压电流信号的周期同为  $T$ , 有式(1)。假定对信号周期的估值为  $T_0$ , 有式(2)。式(2)中  $f$  和  $f_0$  分别为信号的基频及其估值。 $x = (f - f_0)/f_0$  是衡量同步偏差的量, 称为相对频偏, 也称同步偏差。

$$u(t+T) = u(t); i(t+T) = i(t); \quad (1) \quad T_0 = (1+x)T; \text{或} f = (1+x)f_0 \quad (2)$$

在任意时刻  $t_0$  对电压、电流信号进行  $k$  个估值周期 ( $kT_0$ ) 的等间隔采样 ( $\Delta t = kT_0/N$ ) 得到其采样序列:

$$u(j) = u(t_0 + j\Delta t); i(j) = i(t_0 + j\Delta t); j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3)$$

假定电压电流信号的最高谐波次数分别为  $M_u$  和  $M_i$ , 根据奈奎斯特采样定理, 单周期 ( $T_0$ ) 的采样点数  $n \geq \text{Max}\{M_u, M_i\}$ ,  $k$  周期的采样总点数  $N \geq k \times \text{Max}\{M_u, M_i\}$ 。

传统算法下, 不同步采样会导致电压、电流有效值及有功功率等参量测量存在误差<sup>[2-4]</sup>。作者在三角加窗算法<sup>[7]</sup>基础上基于多次平均思想, 提出加权算法求电参量的测量值以减小不同步采样对测量误差的影响:

$$U_k = \sqrt{\frac{k}{N} \sum_{j=1}^N w_k(j) u^2(j)}; \quad I_k = \sqrt{\frac{k}{N} \sum_{j=1}^N w_k(j) i^2(j)}; \quad P_k = \frac{k}{N} \sum_{j=1}^N w_k(j) u(j) i(j); \quad \Psi_k = \frac{P_k}{I_k U_k} \quad (4)$$

式中:  $w_k(j) = W_k \left\{ \frac{k[j - (N+1)/2]}{N} \right\}; j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5)$

收稿日期: 2002-12-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(699301030)

作者简介: 张介秋(1962-), 男, 广东澄海人, 副教授, 主要从事非线性光通信, 光信息处理研究。

称为  $k$  阶权重,  $W_k(t)$  为  $k$  阶权函数, 由下列递推公式确定:

$$W_{k+1}(t) = \int_{-1/2}^{+1/2} W_k(t') dt' \quad \text{其中: } W_1(t) = \begin{cases} 0 & |t| > 1/2 \\ 1 & |t| \leq 1/2 \end{cases} \quad (6)$$

在实际操作时, 先根据精度要求确定每周期的采样点数  $N$  及权函数的阶数  $k$ , 然后按式(5)将权重制成表格并用该表格对采样的电压电流信号按式(4)进行加权运算。

为方便使用, 下面给出前6阶权函数( $k=0 \sim 5$  对应于1~6阶, 由下式确定):

$$W_{k+1}(t) = \begin{cases} 0 & |t| \geq (k+1)/2 \\ \frac{1}{k!} \left(\frac{k+1}{2} - |t|\right)^k; & \frac{k-1}{2} \leq |t| \leq \frac{k+1}{2} \\ \frac{1}{k!} \left(\frac{k+1}{2} - |t|\right)^k - \frac{k+1}{k!} \left(\frac{k-1}{2} - |t|\right)^k; & \frac{k-3}{2} \leq |t| \leq \frac{k-1}{2} \\ \frac{k}{k!} \left[ \left(\frac{k-3}{2} + |t|\right)^k + \left(\frac{k-3}{2} - |t|\right)^k - 2\left(\frac{k-2}{2}\right)^k \right] - \frac{1}{k!} \left[ \left(\frac{k-1}{2} + |t|\right)^k + \left(\frac{k-1}{2} - |t|\right)^k - 2\left(\frac{k}{2}\right)^k \right]; & \frac{k-4}{2} \leq |t| \leq \frac{k-3}{2} \\ \frac{2k-1}{k!} \left(\frac{k-3}{2} - |t|\right)^k - \frac{2}{k!} \left(\frac{k-1}{2} - |t|\right)^k - \frac{k-1}{k!} \left(\frac{k-5}{2} + |t|\right)^k + \frac{1}{k!} \left(\frac{k-3}{2} + |t|\right)^k + (1-|t|)^{k-4}, & \frac{k-5}{2} \leq |t| \leq \frac{k-4}{2} \end{cases} \quad (7)$$

## 2 误差理论分析

### 2.1 不同步采样导致的测量误差

通过上面的  $k$  阶加权算法可以得到测量值:

$$\begin{aligned} U_k(t_0, x) &\approx U \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k \frac{u^2(t') - U^2}{U^2} \right]; & I_k(t_0, x) &\approx I \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k \frac{i^2(t') - I^2}{I^2} \right] \\ P_k(t_0, x) &\approx P \left[ 1 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^k \frac{P(t') - P}{P} \right]; & \Psi_k(t_0, x) &\approx \Psi + \Psi \left(\frac{x}{1+x}\right)^k \left[ \frac{P(t')}{P} - \frac{u(t')}{2U^2} - \frac{i^2(t')}{2I^2} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

式中:  $t' = t_0 - kT/2$  为采样初始时刻,  $U, I, P, \Psi$  分别为电压、电流有效值、有功功率及功率因数的真值。测量值随采样起点  $t' = t_0 - kT/2$  围绕真值小幅波动, 且波动振幅随窗函数的阶数  $k$  的增大而迅速减小, 波形与原波形相似。当采样起点为随机时, 测量值也将随机起伏。当  $x \ll 1$ , 测量结果的不确定度为

$$\frac{\Delta U_k}{U} \approx \frac{\kappa_u}{2} \left| \frac{x}{1+x} \right|^k; \quad \frac{\Delta I_k}{I} \approx \frac{\kappa_i}{2} \left| \frac{x}{1+x} \right|^k; \quad \frac{\Delta P_k}{P} \approx \kappa_p \left| \frac{x}{1+x} \right|^k; \quad \frac{\Delta \Psi_k}{\Psi} \approx \kappa_\psi \left| \frac{x}{1+x} \right|^k \quad (9)$$

比例系数完全由电压、电流的波形及其相互相位(或功率因数)决定:

$$\kappa_u = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{u^2(t)}{U^2} - 1 \right]^2 dt}; \quad \kappa_i = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{i^2(t)}{I^2} - 1 \right]^2 dt}; \quad (10a)$$

$$\kappa_p = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{p(t)}{P} - 1 \right]^2 dt} = \frac{1}{\Psi} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{i(t)u(t)}{IU} - \Psi \right]^2 dt}; \quad \kappa_\psi = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{i(t)u(t)}{IU\Psi} - \frac{u^2(t)}{2U^2} - \frac{i^2(t)}{2I^2} \right]^2 dt}; \quad (10b)$$

对于电压电流均为基频正弦波的情况:

$$\kappa_u = 1/\sqrt{2}; \quad \kappa_i = 1/\sqrt{2}; \quad \kappa_p = \frac{1}{\sqrt{2} |\cos \varphi|} = \frac{1}{\sqrt{2} |\Psi|}, \quad \kappa_\psi = \frac{|\sin \varphi \tan \varphi|}{\sqrt{2}} = \frac{1 - \Psi^2}{\sqrt{2} |\Psi|} \quad (11)$$

其中  $\varphi$  为电压电流信号的相位差。通过上述的加权算法可以把同步偏差造成的各参量的测量误差降低到极低的程度, 这时由采样值的量化截断造成的量化误差便开始变得重要。

### 2.2 量化截断(噪声)导致的测量误差

在同步采样的情况下, 没有同步误差。满足采样定理的同步采样过程虽不会影响测量结果, 但量化截断却会给测量结果造成一定的误差, 称其为量化误差。分析表明, 该测量误差主要依赖于模数转换器的位数  $P$  及采样点数  $N$ , 具体结果为

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U_q}{U} &= \sqrt{\frac{D(U_q)}{U^2}} \approx \frac{A_k U_m}{2^{p+1} \sqrt{3} N U}; & \frac{\Delta I_q}{I} &= \sqrt{\frac{D(I_q)}{I^2}} \approx \frac{A_k I_m}{2^{p+1} \sqrt{3} N I} \\ \frac{\Delta P_q}{P} &\approx \frac{A_k}{2^{p+1} \sqrt{3} N |\Psi|} \sqrt{\left(\frac{U_m}{U}\right)^2 + \left(\frac{I_m}{I}\right)^2}; & \frac{\Delta \Psi_q}{|\Psi|} &\approx \frac{A_k \sqrt{1 - \Psi^2}}{2^{p+1} \sqrt{3} N |\Psi|} \sqrt{\left(\frac{U_m}{U}\right)^2 + \left(\frac{I_m}{I}\right)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

式中:  $U_m$ 、 $I_m$  分别为满量程时的电压、电流峰-峰值,  $U$ 、 $I$ 、 $\Psi$  分别为电压、电流信号的有效值及功率因数,  $A_k$

定义为  $A_k = \sqrt{\sum_{j=1}^N [kw_k(j)]^2 / N}$   $A_1 = 1.00, A_2 = 1.15, A_3 = 1.28, A_4 = 1.38, A_5 = 1.47 \dots$ 。

若取  $U_m/U = I_m/I = 2\sqrt{3}$ , 则式(12)变为

$$\frac{\Delta U_q}{U} \approx \frac{A_k}{2^p \sqrt{N}}, \quad \frac{\Delta I_q}{I} \approx \frac{A_k}{2^p \sqrt{N}}; \quad \frac{\Delta P_q}{P} \approx \frac{\sqrt{2}A_k}{|\Psi| 2^p \sqrt{N}}; \quad \frac{\Delta \Psi_q}{\Psi} \approx \frac{\sqrt{1-\Psi^2} \sqrt{2}A_k}{|\Psi| 2^p \sqrt{N}} \quad (13)$$

可以看出量化误差与采样点数的开方根成反比, 增加量化位数  $P$  及采样点数  $N$  均可减小各参量的量化误差。此外在功率因数较低时, 有功功率、功率因数的量化误差及同步误差均反比于功率因数。因此在低功率因数情况下, 有功功率、功率因数的测量精度将降低。

### 2.3 综合测量误差

由于量化误差与同步误差可以看成是独立无关的, 所以当同步误差和量化误差同时存在时, 由式(9)、式(13)可得到各参量的综合测量误差为(假定  $U_m/U = I_m/I = 2\sqrt{3}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U}{U} &= \frac{\sqrt{\Delta U_k^2 + \Delta U_q^2}}{U} \approx \sqrt{\frac{\kappa_u^2}{4} \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{A_k^2}{2^{2p}N}}, & \frac{\Delta I}{I} &= \frac{\sqrt{\Delta I_k^2 + \Delta I_q^2}}{I} \approx \sqrt{\frac{\kappa_i^2}{4} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{2k} + \frac{A_k^2}{2^{2p}N}} \\ \frac{\Delta P}{P} &= \frac{1}{|\Psi|} \sqrt{\frac{\kappa_p^2}{4} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{2k} + \frac{A_k^2}{2^{2p}N}}; & \frac{\Delta \Psi}{\Psi} &= \frac{1-\Psi^2}{|\Psi|} \sqrt{\left(\frac{\kappa_\psi \Psi}{1-\Psi^2}\right)^2 \left(\frac{x}{1+x}\right)^{2k} + \frac{2A_k^2}{2^{2p}N}} \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)对于预估一个测量方案的测量精度或由测量的精度要求选择权函数阶数  $k$ , 量化位数  $P$  及采样总点数  $N$  具有指导意义。例如对于 50 Hz 市电, 因频率波动范围一般为 49 ~ 51 Hz, 因此  $x$  可取为 2%。若用 8 位 A-D 转换器, 双周期采样  $k=2$ , 单周期采样点数为  $n=50$ , 采样总点数  $N=100$ , 则同步偏差及量化误差引起的电压测量误差分别为  $1.4 \times 10^{-4}$  和  $5 \times 10^{-4}$ 。

## 3 数值模拟

对于  $k$  阶加权算法, 应对信号进行  $k$  周期( $kT_0$ )采样, 假定每周期采样点数为  $n$  ( $n \geq$  信号最高谐波次数的 4 倍, 因为  $u^2(t)$  的最高谐波次数是信号  $u(t)$  最高谐波次数的 2 倍), 总采样点数为  $N=kn$ , 采样数据为  $u(j), i(j), j=1, 2, 3, \dots, N$ 。用式(4)进行加权运算可得电压、电流有效值及有功功率、功率因数。

对于电压电流均为基频正弦波进行模拟, 电压、电流、有功功率及功率因素的结果如图 1(a) - (d) 所示。所用参数为电压电流相位差  $\varphi = \pi/4$ ,  $k=3$ ,  $n=24$ ,  $N=72$ , 量化位数为  $p=16$ ,  $U_m/U = I_m/I = 2\sqrt{3}$ 。图中抛物状虚线表示由式(9)确定的不同步采样引起的测量误差, 水平的点划线表示由式(13)式确定的由量化截断引起的测量误差, 实线表示由式(14)确定的综合误差, 每个圆点是对 60 个随机初始采样相位进行数值模拟得到的测量值的归一化标准差。权函数的阶数  $k(1 \sim 4)$  对电压有效值的综合测量误差的影响如图 2(a) - (d) 所示, 当  $k=3 \sim 4$  时, 即使是采用 16 位 A-D 转换器, 量化误差仍是测量的主要误差。数值模拟结果与理论分析基本一致。 $x=0$  处误差较大是可以理解的, 该处没有同步误差, 只有量化误差, 而完全同步导致三个采样周期内的量化误差不能互相抵消, 而是相干叠加, 因此完全同步将导致量化误差增大。对于非正弦信号, 情况类似。

## 4 结论

就同步误差及量化误差对各参量的测量精度的影响进行了分析, 得到了综合误差公式。该公式对于设计测量方案, 分析测量误差具有一定指导意义。随着权函数的阶数  $k$  的增大, 同步误差对测量精度的影响将迅速减小, 而量化误差将成为制约测量精度进一步提高的关键因素。各参量的量化误差均正比于 A-D 转换器的精度( $2^{-p}$ ), 反比于采样总点数  $N$  的开方根, 因此适当增加采样点数有利于减少量化噪声带来的影响。此外当所用的权函数阶数较高时, 完全同步采样反而会因周期内的量化误差的相干累积而造成综合测量误差的增大, 是不可取的, 除非采样点数较多, 量化位数较高。

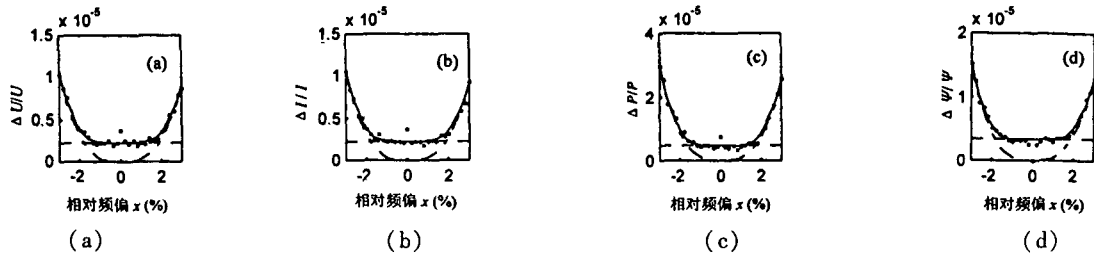


图 1 同步误差和量化误差引起的电压有效值测量误差

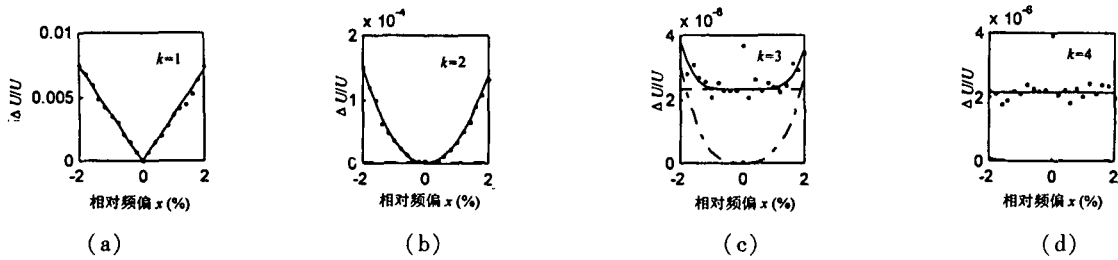


图 2 非同步采样引起的电压测量误差随权函数阶数  $k$  的增大而迅速减小

参考文献:

[1] Rathore T S. Theorems on Power, Mean and RMS Values of Uniformly Sampled Periodic Signals [J]. IEE Proc, 1984, 31(8): 598 - 600.

[2] Kampik M, Laiz H, Klonz M. Comparison of Three Accurate Methods to Measure AC Voltage at Low Frequencies [J]. IEEE Trans on IM, 2000, 49(2): 429 - 433.

[3] 胡庚生, 马宏忠. 非正弦周期信号测量同步误差研究[J]. 中国电机工程学报, 2000, 20(9): 35 - 40.

[4] Kolanko J K. Accurate measurement of power, energy, and true RMS voltage using synchronous counting [J]. IEEE Trans on IM, 1993, 42(3): 752 - 754.

[5] Dai X, Gretsche I H R. Quasi - Synchronous Sampling Algorithm and It Applications [J]. IEEE Trans on IM, 1994, 43(2): 204 - 209.

[6] Andria G, Savino M, Trotta A, et al. Windows and Interpolation Algorithms to Improve Electrical Measurements Accuracy [J]. IEEE Trans on IM, 1989, 38(8): 856 - 863.

[7] 张介秋, 陈砚圃, 梁昌洪, 等. 有功功率及功率因数的三角加窗算法 [J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(6): 19 - 24.

(编辑: 姚树峰)

## Analysis of Synthetic Error in Measurement of RMS and Active Power

ZHANG Jie - qiu<sup>1,2</sup>, HAN Feng - yan<sup>3</sup>, FENG Da - yi<sup>1</sup>, CHEN Yan - pu<sup>4</sup>, LIANG Chang - hong<sup>2</sup>

(1. The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China; 2. National Key Laboratory of Antennas and Microwave Technology, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China; 3. College of Telecom, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China; 4. Computer Center, Xi'an Communication College, Xi'an, Shaanxi 710106, China )

**Abstract:** A formula of synthetic errors is obtained from analysis of effect of synchronous error and quantification noise on the measurement precision of the electrical parameters in extracting an effective value and active power by using a weighted algorithm. The results demonstrate that the measurement errors caused by asynchronous sampling decrease rapidly even to a secondary factor, and the quantification errors may become a key factor of errors with the increase of the order number of the weighted function used. The measurement errors of the electrical parameters caused by quantification noise of data are in direct proportion to the precision of quantification and in inverse proportion to the square root of the number of the sampling points. The measurement errors caused by data quantification can be decreased by increasing the number of quantification bits of the data or the number of sampling points.

**Key words:** quantification error; synchronous error; RMS value; active power; power factor measurement; weighted algorithm