非线性进化的特征

林　益
(斯里普瑞洛克大学 数学系，美国 宾西法尼亚－斯里普瑞洛克　16057)

摘　要:对目前正在研究的系统非线性理论与溃变理论进行了概述。通过对线性进化与非线性进化的比较,可以发现不连续性和奇异性是非线性整体进化的基本特征。通过把数学模型与其潜在的物理系统进行结合,正式地引入了在整体进化研究中的溃变概念。基于对非线性模型的分析,给出了溃变的数学物理学意义和数学特征。

关键词:线性性;非线性性;整体进化;溃变
中图分类号:O241.7　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009－3516(2003)03－0001－07

1　非线性进化的研究背景

不同于古希腊连续性思想逻辑影响,几何学和代数的联姻,获得了基于笛卡儿(R. Descarte)的坐标系统,这样的系统曾经大大地促进了微积分的发展[1]。作为对新理论应用的检验,牛顿(Newton)的质点力学得到了明确而有效的简洁表述。伴随微积分的出现,在物理学领域,出现了一些突破,诸如自由落体伽利略(Galileo)定律的发现,关于星体运动的开普勒(Kepler)定律的发现等等。因此,科学研究的焦点转移到了去寻求那些在动力学和运动学之间的定量关系及其这些关系的优化[2]。即使许多学者曾经在这些领域作出了很大的贡献,最成功的结果还是应归功于牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)。这是因为他们和他们的同伴们建立微积分的正规化方法。沿着这条历史的线索,"三体"问题作为在微积分正式诞生之后最早的非线性进化问题而出现。

在 17 世纪的后半世纪,微分方程的研究成为一个焦点,这是由于解决动力学物理问题的一种需要。这类物理学问题的研究经常联系着使用微分方程的成功程度。它们是弹性理论和天体运动理论。前者是基于胡克(Hooke)定律的研究,后者是基于牛顿(Newton)万有引力定律的研究。

由于非线性问题出现在这些领域的几乎所有角落,作为研究微分方程解析解先驱者之一的伯努里(J. Bernoulli),系统地研究了非线性微分方程。从伯努里时算起,在 300 多年以前,当微积分被正式地建立而没有得到整体的完成时,微积分学就已经遇到非线性问题研究的"难题"。在一种试图解决这个"难题"的尝试中,许多特殊方法被引入来降低问题的难度。这些方法可以粗略地划分为下列的课题:线性化方法,稳定性方法,数值解法,正交展开法,等等[3]。

基于在非线性科学领域已经得到的成果,现在应该是完整地组织连续性思想逻辑方法系统的时代。学者们已最终认识到微积分方法是一种基于连续性和规范性的计算系统,而客观世界的现象所表现出的连续性和规范性仅仅是在一些非常特殊的条件下产生的。同时,不连续性和非规范性及进化现象的存在在客观世界中却是广泛而普遍的。

微积分是在下列的基本概念上得到发展的[4]:函数,函数的极限,连续性和可微性,适定性。适定性的概念可以粗略地描述如下:由于技巧方面的原因,大多数微分方程或者微分方程组都不能精确地被解决。

收稿日期:2002－12－01
作者简介:林　益(1959－),男,福建福州市人,教授,美国非线性科学院院士,国际一般系统论研究会主席,Auburn 大学数学博士,Carnegi Mellon 大学统计博士后,主要从事数学及一般系统理论及应用,数学建模,非线性分析及应用等研究,1999 年荣获欧洲维纳科学奖,已出版著作及专集十一部.

而这些微分方程或者微分方程组都是寄希望于解释一些自然现象或产生于一些工程问题。因此,对于微分方程解的存在性,唯一性和稳定性的研究就变得极端重要。这样,适定性的问题被定义如下:对于一个给定的微分方程或微分方程组,如果它的解满足存在性,唯一性和稳定性条件,那么,原微分方程(组)被称做是适定的。否则,称其为非适定的。

通常见到的微分方程能被写作如下的形式:

$$u = f(t,u) \tag{1.1}$$

或

$$\partial_t u = g(t,u,\partial_x u) \tag{1.2}$$

这里,u 是一个 $n \times 1$ 维的未知函数矩阵,$f(t,u)$ 是 t, u 的 $n \times 1$ 维矩阵函数, $g(t,u,\partial_x u)$ 是 t, u,和 $\partial_x u$ 的 $n \times 1$ 维矩阵函数,其中的 $\partial_x u$ 是一个整体的输入项。在这里, ∂_t 和 ∂_x 分别表示微分算子 $\frac{\partial}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x}$ 。如果矩阵 f 和 g 包含 u 或者 u 和 $\partial_x u$ 的非线性项,那么,它们分别被称为非线性常微分方程和非线性偏微分方程。

因为一般非线性方程的解仅仅在一个有限的时间区间内是连续的,局部存在定理不能用于确保非线性方程的总体解的存在性[5]。为了使非线性方程(1.1)的解存在且唯一,未知函数 u 必须满足里普希茨(Lipschitz)条件。

当考虑微积分系统是否可以真正地解决实际生活问题时,就会出现稳定性问题。这样的问题首先出现在 Newton 和 Euler 关于天体运动的研究工作中,在这些工作中遇到了摄动问题。尔后,这个问题实用的解首先由拉格朗日(Lagrange)和拉普拉斯(Laplace)所提出。在 Lagrange 工作的基础上,庞加莱(Poincare)更进一步丰富了能量准则并为李亚普诺夫(Lyapunov)建立他的一般稳定性理论奠定了基础。

微分方程的适定性必须满足存在性、唯一性、稳定性的所有三个条件。对于非线性微分方程组,一般非常难同时满足这些条件。因此,非线性问题就不能考虑适定性和以前对适定性系统所研究得到的所有解析方法。而应该应用判别准则把非线性问题引入到非适定性系统(非线性系统)的研究领域中。

另外一个问题是奇异性,这是在考虑非线性问题时广泛面临的问题。一般地,奇异性可以分为两类:一类是除了最高阶导数项的系数,导数和原函数项的至少一个其它他的系数在一个点或若干点处发生溃变,另一类是初始值条件或者边界值条件是不连续的。其一般形式可以写成如下的表达式:

$$x^{\alpha} u' = A(x,u)u + B(x) \tag{1.3}$$

这里,u 是一个 $n \times 1$ 维矩阵, $A(x,u)$ 和 $B(x)$ 分别是一个 $n \times n$ 维矩阵和一个 $n \times 1$ 维矩阵,且 $u' = \frac{du}{dx}$。

第二类的奇异性包含着这样的一些微分方程,其解具有奇异性。一般地,这类特异性主要出现在非线性微分方程的解中。

自从 Newton 时代以来,许多物理的问题和应用问题都归结为求解同样的非线性微分方程。这就是现在为什么形成了具有独立的研究领域的被称为“非线性科学”学科存在的原因。

为了避免长达 300 多年的那种科学与数学结合迷惑的困难,我们将着眼于引入了关于时间和空间观念的非线性微分方程。从而,我们将能够看见并且理解非线性性的数学特征和物理特征,而不是象以前那样所不能办到的[6]。

2 线性进化和非线性进化的进化特征

当所有非线性微分方程被视为具有时间观念或具有时空观念的进化问题时,我们就能够比较线性进化方程和非线性进化方程之间的进化特征。当然,我们这里所讲的非线性方程是指那些不能通过使用变量化简的方法而转变为线性方程的那些方程。

例 1 方程

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dx}{dt} = x^2$$

的通解分别由如下的表达式给出:

$$x = Ae^{t}, \quad x = -\frac{1}{B+t} \tag{2.1}$$

这里 x 代表我们感兴趣的物理量,t 表示时间。

其中的 A 和 B 为积分常量。明显地,第一个解对所有的 $t \in (-\infty, \infty)$ 是连续的。而如果 $B>0$,则第二个解关于时间连续地趋于零。否则,如果 $B<0$,x 就是关于时间呈现出一种不连续性。

例2　伯努里(Bernoulli)方程

$$y + f(t)y + g(t)y^{n} = 0 \qquad (n \neq 1)$$

的通解被给出如下

$$y^{n-1} = \frac{e^{F}}{C + \int (n-1)g(t)e^{F}dt} \tag{2.2}$$

这里的 C 是一个积分常数,$F = \int (n-1)f(t)dt$ 。

如果 $n=2$,$f(t)=\alpha$ 和 $g(t)=\beta$ 都是常数,则不连续性就发生在 $t = t_b = \frac{1}{\alpha}\ln|\frac{\beta}{C\alpha}|$ 。如果 $n=3$,$f(t)=2t$ 和 $g(t)=2at^{3}$,那么,解 y 的不连续性就发生在 t 满足如下表达式的情形。

$$-\frac{1}{2}a - at^{2} + Ce^{2t^{2}} = 0$$

例3　一般的黎卡提(Riccati)方程

$$y = f(t)y^{2} + g(t)y + h(t)$$

能够被解析地求解。特殊的 Riccati 方程

$$y = y^{2} + 3y - 4$$

的一般解是

$$y = \frac{1-4Ce^{5t}}{1+Ce^{5t}}$$

如果积分常数 $C<0$, 这个解是不连续的。

Riccati 方程　$y = ay^{2} - b = 0$

的一般解由如下表达式给出

$$y = \begin{cases} C + bt, & \text{若 } a = 0 \\ \frac{C}{1+aCt}, & \text{若 } b = 0 \\ \frac{C\sqrt{ab} + b\tanh\sqrt{ab}t}{\sqrt{ab} + a\coth\sqrt{ab}t}, & \text{若 } ab > 0 \\ \frac{C\sqrt{-ab} + b\tanh\sqrt{-ab}t}{\sqrt{-ab} + a\coth\sqrt{-ab}t}, & \text{若 } ab < 0 \end{cases}$$

因此,除情况 $a=0$ 外,这个解 y 是不连续的。

即使我们的上述的例子都是关于常微分方程的,然而,对于非线性微分时间和空间进化方程的系统,类似的结论仍然成立。总结上述的例子,我们能观察到下述结论:

1) 一个对于时间连续进化的线性进化方程的解,是对初值和初始状态进行扩张的一个上下起伏的进化。而非线性进化方程的解,并非在特殊的条件下,包含着关于时间的不连续进化,反映出非初值化的进化和"生与死"变迁型的跃变。

2) 线性化不是非线性的近似。

3) 微积分是建立在连续性与可微性假设上的一套规范化的数学方法。因此,所有建立在微积分基础上的方法和理论就必然也受这些假设限制的影响。

4) 所有求解非线性进化方程的方法,诸如数值解法,各种各样的近似解法如级数展开法等等的方法,都将面临下列问题的其中一个:①" 爆发性"的产生或者消失;②产生误差值计算的陷阱;③ 原始问题的不连续性和奇异性被消除或者被丢失,这样作为结果而产生的结论确实与原来问题没有关系。

例 4 我们来考察谱方法与数值方法的比较问题，考虑下列的拟线性对流方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(0,x) = -\sin x \end{cases} \tag{2.3}$$

该方程的解由

$$u = -\sin\ (x - ut) \tag{2.4}$$

或

$$\begin{cases} u = -\sin \xi \\ \xi = x - ut = x + \sin \xi t \end{cases} \tag{2.5}$$

给出。

方程 (2.4)和(2.5)表示了速度和行波特征曲线的关于时间的所有变化。现在,对方程(2.3)运用傅立叶(Fourier)级数展开法。给出

$$-u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx \tag{2.6}$$

其中

$$u_n(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)\sin nx\ \mathrm{d}x \tag{2.7}$$

现在,运用分部积分法导出

$$u_n(t) = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\ \mathrm{d}x \tag{2.8}$$

把方程(2.5)代入方程(2.8)得

$$u_n(t) = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos n(\xi - \sin \xi t)\cos \xi\ \mathrm{d}\xi \tag{2.9}$$

利用贝塞尔(Bessel)函数,可以得到

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\xi - z\sin \xi)\,\mathrm{d}\ \xi \tag{2.10}$$

现在,根据递推公式

$$J_n(z) = \frac{z}{2n}[J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z)] \tag{2.11}$$

可以得到

$$J_n(z) = \frac{z}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos n(n\xi - z\sin \xi)\cos \xi\ \mathrm{d}\xi \tag{2.12}$$

通过比较方程(2.12)和(2.9)得

$$u_n(t) = \frac{2J_n(nt)}{nt} \tag{2.13}$$

因此,可以得到方程(2.3)的级数解如下:

$$u = -2\sum_{n=1}^{\infty}(nt)^{-1}J_n(nt)\sin nx \tag{2.14}$$

实际上,道格拉斯(Dauglas)曾经用如下的特征曲线的方法获得了方程(2.3)的解:

$$u_x = -\frac{\cos x}{1 - t\cos x} \tag{2.15}$$

因此,当 $t = t_b = \dfrac{1}{\cos x}$,方程(2.3)呈现奇异性。

如果对方程(2.3)直接运用数值积分方法求解,不仅会出现解的多重性问题,而且会出现激烈转折点。而建立在谱分解基础上级数解的结果中,既不包含解的多重性问题,也会出现激烈转折点,即,具有非奇异性。这就是为什么不具有任何光滑性质的积分会引起计算的不稳定性即奇异性的原因。如果引入光滑性质而不是对最终结果解进行光滑处理,则会出现致使所有扰动的干涉更加调和。另一方面,使用级数展开的一系列方法的后果,或者说,斯图姆 - 刘维尔(Sturm - Lioville)定理的核心,是消除所有奇异性。因此,无论是数值解还是积分解全都不能正确地反映非线性进化的全部特征。

3 溃变理论的建立

基于上述的讨论,在本节中,我们将考察整体进化并且指出奇异性和不连续性是非线性进化的基本特征。从而,正式地引入溃变理论。然后,研究了溃变理论的数学物理意义和数学特征。

3.1 关于整体进化

在自然界和人类社会中所存在的整体进化现象中,不连续性有许多不同的表现方式,诸如流体的收敛和发散;旋涡流;水的飞溅;侧流,喷射流,天气云和雨的进化;化学反应中所出现的燃烧和爆炸;生命进化中的诞生和死亡;人口的出现和消失;宇宙微粒的产生和差异;一种自由社会的经济危机;证券市场价格的升高和下降,等等,这些正是日常能观察到的一些不连续现象和变迁性的跃变。这就是说,在客观的进化中出现的连续性和可微性是一些简单的特殊的情形,而与其相关的情形是带有不连续性的更普遍而广泛的客观存在的情况[4]。由于自然规律的决定,使所有事物都要经过增长阶段并走向消亡,所有的人不得不出生并走向死亡,客观世界中的事物具有这样的共性。又由于非线性进化方程具有作为其基本特征的不连续性和奇异的改变性,建立溃变理论的一种数学物理的基础便具有了坚实的土壤。在这样的一种理论中,不连续性和奇异性转变将根植于物理的系统变化现实性之中,这种物理的系统变化是借助于非线性数学进化模型[7]的奇异问题形式。

3.2 溃变理论的数学物理意义

客观问题和事件的颠倒反转和变迁性跃变总是预测科学中的一个公开的中心而极端困难的问题。一个对于线性系统相对地比较更成熟理论被认为是缺乏对未来不连续性转变的预言能力。用非线性进化模型的术语来讲,他们反映着旧结构的破坏性,这种破坏性自同构于整体进化的初始值和不连续性变迁性跃变。他们的形式能被用来描述客观事物不连续性变迁性跃变的现实性。为了既反映数学非线性方程的整体进化的奇异转变特征,又反映人们在现实世界中所广泛见到的事物客观进化中新结构对旧结构的取代,为了研究不连续性,变迁性跃变以及颠倒反转进化,引入溃变概念如下:

如果非线性方程

$$\begin{cases} \dot{u}=f(t,u) \\ u|_{t=t_0}=u_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

的柯西(Cauchy)问题在区间 $t\in(t_0,t_b)$ 上有一个解 u,$t_0<+\infty$,且当 $t\to t_b$时,下式成立

$$\lim_{t\to t_b}|u|=+\infty \tag{3.2}$$

那么,$u=u(t;t_0,u_0)$ 叫做是一个溃变解;或者称这个解所相应的运动产生溃变。

这里 u 是状态变量的一个 $n\times1$ 维的矩阵,$f(t,u)$ 是 t 和 u 函数的 $n\times1$ 维矩阵,t 是时间变量,$\dot{u}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

在这个定义中,我们已假定方程组(3.1)是对所解释的物理系统的真实描述。因此,方程(3.2)意味着数学模型在 $t=t_b$处溃变,同时在 $t=t_b$所解释的物理系统经历一个变迁性跃变(溃变)。

至于具有时间和空间两个独立变量的非线性方程,溃变的概念可以类似地被定义。有所区别的是溃变可能发生在某些状态变量的导数上。如果时间空间进化方程被写作为

$$\partial_t u=g(t,u,\partial_x u) \tag{3.3}$$

其中 u 是状态变量的一个 $n\times1$ 维的矩阵,$g(t,u,\partial_x u)$ 是 t,u 和 $\partial_x u$ 的函数的 $n\times1$ 维矩阵,∂_t 和 ∂_x,分别表示微分算子$\dfrac{\partial}{\partial t}$ 和$\dfrac{\partial}{\partial x}$。假定初始(或者边界)条件是

$$u(t_0,x)=u_0(x) \tag{3.4}$$

那么,当解 $u=u(t,x;t_0,u_0)$或者 $u_x=u_x(t,x;t_0,u_0)$在 $t\in[t_0,t_b)$ 连续变化时,当 $t\to t_b$ 时,下列的表达式成立

$$\lim_{t\to t_0}|u|=+\infty \tag{3.5}$$

或者

$$\lim_{t\to t_0}|u_x|=+\infty \tag{3.6}$$

那么,u 或 u_x 都能被叫做是溃变解,如果由方程(3.3)和(3.4)所形成的边值问题,真实地描述在 $t=t_b$

时刻的一个物理系统,则这个物理系统经历一个变迁性跃变(溃变)。在本文的其余部分,我们总假定这种假设成立。

现在,我们可以把所有的溃变分成两类:变迁性溃变和非变迁性溃变。一个溃变称为是变迁性的,如果在奇异时刻 $t = t_b$ 的前和后都有进化的爆发性成长(或衰败)发生。否则,它是非变迁性的。

3.3 非线性溃变:溃变理论的一个数学特征

让我们来考察如下的自治方程,

$$\dot{u} = a_0 + a_1 u + \cdots + a_{n-1} u^{n-1} + u^n \tag{3.7}$$

其中 u 是状态变量。即使它的解析解不能确切地被找到,它的溃变性质可以通过定性的手段来研究。在实数域,方程(3.7)可以写成

$$\dot{u} = F = (u-u_1)^{p_1}\cdots(u-u_r)^{p_r}(u^2+b_1u+c_1)^{q_1}\cdots(u^2+b_mu+c_m)^{q_m} \tag{3.8}$$

其中,p_i 和 q_j, $i=1,2,\ldots,r$, $j=1,2,\ldots,m$,全部是正整数,$n=\sum_{i=1}^{r}p_i+2\sum_{j=1}^{m}q_j$,$\Delta=b_j^2-4c_j$, $j=1,2,\ldots,m$。不失一般性,我们假定 $u_1\geqslant u_2\geqslant u_3\geqslant\cdots\geqslant u_r$, 这样,方程(3.8)解的溃变性质可以由下述的定理给出。

定理 方程(3.8)所给出的初值问题的解包含溃变的条件由如下给出

1) 当 u_i,($i=1,2,\ldots,r$)不存在,即 $F=0$ 没有任何实根;且

2) 如果 $F=0$ 有实根 u_i, $i=1,2,\ldots,r$

(a) 当 n 是偶数时,如果 $u>u_1$, 那么 u 包含溃变; 当 $u<u_r$, 解不存在。

(b) 当 n 是奇数时,无论是 $u>u_1$ 或者是 $u<u_r$, 溃变总存在。

证明: 1° 如果 $F=0$ 没有任何实数解,方程(3.8)变成

$$\dot{u} = (u^2+b_1u+c_1)^{q_1}\cdots(u^2+b_mu+c_m)^{q_m} \tag{3.9}$$

由表达式 $b_j^2-4c_j<0$ 表明 $y_j=u^2+b_ju+c_j$可以取得它的绝对最小值 $\alpha_j=\frac{1}{4}(4c_j-b_j^2)$ 。因此,对方程(3.9)可以有如下的估计:

$$\dot{u}\geqslant\beta_0(u^2+b_1u+c_1)\geqslant\beta_0(u+\frac{1}{2}b_1)^2>0 \tag{3.10}$$

其中, $\beta_0=\alpha_1^{q_1-1}\cdot\alpha_2^{q_2}\cdots\alpha_m^{q_m}$。如此知,$u$ 是一个单调增函数。求解方程(3.10)得到

$$u\geqslant-\frac{1}{2}b_1+\frac{u_0}{1-u_0\beta_0 t} \tag{3.11}$$

其中 u_0 是初始值。当 $t\to t_b=\frac{1}{u_0\beta_0}$ 时,$u\to\infty$. 因此,u 包含溃变。从而,表述 1)为真。

2° 如果 $F=0$ 有实数解 $u_i, i=1,2,\ldots,r$,那么,我们有

(a) 当 n 是偶数时,由于 $q=2\sum_{i=1}^{m}q_i$是偶数,$p=2\sum_{i=1}^{r}p_i$也是偶数。如果 $u>u_1$或者 $u<u_r$,则成立

$$\dot{u}>0 \tag{3.12}$$

因此,u 是一个单调增函数,这与事实 $u<u_r$矛盾。所以,当 $u<u_r$时,不存在任何解 u。下面,我们证明当 $u>u_1$时, 方程的解包含溃变。由 $u_1\geqslant u_2\geqslant u_3\geqslant\cdots\geqslant u_r$可知,方程(3.8)有如下的估计:

$$\dot{u}\geqslant\beta_1(u-u_1)^p \tag{3.13}$$

其中 $\beta_1=\alpha_1^{q_1-1}\cdot\alpha_2^{q_2}\cdots\alpha_m^{q_m}$。求解这个不等式得

$$u\geqslant u_1+\frac{1}{\sqrt[p-1]{-[A_0+(p-1)\beta_1 t]}} \tag{3.14}$$

这里 A_0 是积分常数。这就是说,在一定条件下,方程(3.14)就呈现溃变。

(b) 当 n 是奇数时,由于 q 是 偶数,所以 p 必然是奇数。因此,当 $u>u_1$,有方程(3.12)。这就是说,我们有如下关系式:

$$\dot{u}\geqslant\beta_1(u-u_1)^p>0 \tag{3.15}$$

解这个不等式并选择方程(3.14) 的“+”分支。因此,u 包含溃变。

当 $u<u_r$时,我们有

$$\dot{u}<0 \tag{3.16}$$

因此,u 是一个单调减函数并且有如下的估计

$$\dot{u}\leqslant\beta_1(u-u_r)^p<0 \tag{3.17}$$

解这个不等式并取“ - ”分支就得到

$$u\leqslant u_r-\frac{1}{\sqrt[p-1]{-[A_0+(p-1)\beta_1 t]}}$$

因此,u 包含溃变。从而定理中的表述2)成立。证明完毕。

参考文献:

[1] Ball W R. A short account of the history of mathematics[M]. New York:Dover,1960.

[2] 陈昌曙. 自然科学发展简史[M]. 沈阳:辽宁科学技术出版社,1985.

[3] 陈傅璋. 数学分析[M]. 上海:上海科学技术出版社,1979.

[4] Kline M. 古今数学思想[M]. 上海:上海科技出版社,1983.

[5] Dauglas A. Four existence theorems for hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables[J]. Comm. Pure Appl. Math., 1952,(2):119 - 154.

[6] Lin Y. Discontinuity: a weakness of calculus and beginning of a new era[J]. The International Journal of Systems and Cybernetics,2000,27: 614 - 618.

[7] Lin Y,Wu Y. Blown - ups and the concept of whole evolutions in systems science[J]. Problems of Nonlinear Analysis in Engineering,1998,(4):16 - 31.

[8] Glassey R T. On the blowing up of solution to Cauchy problems for nonlinear Schr{ò}dinger equation[J]. J. Math. Phys., 1977,18:1794 - 1797.

(编辑:田新华)

Characteristics of Nonlinear Evolutions

YI Lin

(Department of Mathematics, Slippery Rock Unniversity Slipery Rock, PA 16057, USA)

Abstract: In this paper, our current studies on nonlinearity and blown - ups are summarized. Through comparing linear and nonlinear evolutions, it is observed that discontinuities and singularities are the fundamental characteristics of nonlinear whole evolutions. By combining mathematical models and the underlying physical systems, the concept of blown - ups is formally introduced for the study of whole evolutions. Based on analysis of nonlinear models, mathematical physics meanings and mathematical characters of blown - ups are provided.

Keywords: linearity; nonlinearity; whole evolution; blown - up.