第3卷第4期　　空军工程大学学报(自然科学版)　　Vol.3 No.4
2002年8月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Aug. 2002

飞机扰动运动方程特征根的数值求解

张建邦，程邦勤，王　旭
(空军工程大学 工程学院，陕西 西安 710038)

摘　要:用一元四次方程精确解的解析公式,研究飞机扰动运动特征方程的求解方法,并讨论计算机编程中应注意的若干问题。通过对某型飞机典型扰动运动方程特征根的精确求解,表明本方法对研究飞机的运动模态有一定的积极意义。

关键词:扰动运动;特征方程;飞行模态;精确解
中图分类号:V21　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2002)04-0081-03

研究飞机在飞行过程中受大气以及其它突发事件扰动,飞行员对飞机实施操纵后飞机的飞行过程是否稳定,对飞机设计起着重要作用。根据飞机受扰后,力及力矩只与纵向参数或只与横航向参数有关,将飞机的变化过程的控制方程分解为纵向扰动方程及横航向扰动方程。求解这些方程,便可得到 $\Delta\bar{V}$、$\Delta\alpha$、$\Delta\vartheta$ 以及 β、ω_x、ω_y、γ 等物理量随时间的变化关系,从而确定飞机的飞行动态。但在研究飞机受扰动后的稳定性时,必须精确知道扰动方程的特征根。

由于飞机扰动运动的特征方程通常都是四次方程,精确求解分析比较困难,通常都采用了简化分析的方法。这样可以大致了解各不同特征根主要是由哪些气动参数所确定,从而在发现飞行不稳定时,很快找出问题的症结所在。

但事实上,在飞行器设计技术已相当先进的今天,对飞机各部件布局已不能还仅仅只停留在定性研究上,而应进行定量研究,这就要求对扰动运动特征方程求解其精确解。本文在于给出一元四次方程根的解析求解过程,同时给出相应计算机编程中应注意的若干问题,最后给出对相关资料中两个扰动运动特征方程的数值试验。

1　一元四次方程求解过程的数学推导

设一元四次方程的一般形式为

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \tag{1}$$

由精典数学方法,它的四个根与如下两个方程的四个根完全相同[1]

$$x^2+(a+\sqrt{8y+a^2-4b^2})\frac{x}{2}+\left(y+\frac{ay-c}{\sqrt{8y+a^2-4b^2}}\right)=0 \tag{2}$$

$$x^2+(a-\sqrt{8y+a^2-4b^2})\frac{x}{2}+\left(y-\frac{ay-c}{\sqrt{8y+a^2-4b^2}}\right)=0 \tag{3}$$

式(2)、(3)中的 y 是三次方程

$$8y^3-4by^2+(2ac-8d)y+d(4b-a^2)-c^2=0 \tag{4}$$

的任一实根。

可见式(1)的求解已转化为对式(4)的求解。不失一般性,设一元三次方程为

$$a_1y^3+b_1y^2+c_1y+d_1=0 \tag{5}$$

与式(4)相对应,则 $a_1=8$,$b_1=-4b$,$c_1=2ac-8d$,$d_1=d(4b-a^2)-c^2$。

收稿日期:2001-01-23
作者简介:张建邦(1960-),男,陕西铜川人,讲师,硕士,主要从事教学管理研究.

对式(5)除以 a_1,并令 $y=z-b_1/(3a_1)$,则将式(5)化为

$$z^3+pz+q=0 \tag{6}$$

式中 ,$p=\frac{c_1}{a_1}-\frac{b_1^2}{3a_1^2}$,$q=\frac{2b_1^3}{27a_1^3}-\frac{b_1c_1}{3a_1^2}+\frac{d_1}{a_1}$。

再按三次方程求解的卡尔丹公式,可知式(6)的三个根依次为

$$z_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{7}$$

$$z_2=\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{8}$$

$$z_3=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{3}\right)^3}} \tag{9}$$

式中 ,$\omega=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, $\omega^2=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$,i 是虚数单位,满足 $\mathrm{i}^2=-1$。

对于式(6),根的判别式为

$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{10}$$

当 $\Delta>0$ 时,有一个实根和两个复根;当 $\Delta=0$ 时,有三个实根,其中当 $p=q=0$ 时,有一个三重零根,当 $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2=-\left(\frac{p}{3}\right)^3\neq0$,三个实根中有两个相等;当 $\Delta<0$ 时,有三个不等的实根。由此可知,仅当 $\Delta>0$ 时,式(7)、(8)、(9)中才有可能出现复根,但显然此时$\sqrt{\Delta}$ 不会产生虚数单位,因而式(7)不可能是复根。因此,不管系数 p、q 如何,式(7)都是式(6)的一个实根。

按式(7)求出 z_1 的值,即可求得式(5)的一个实根

$$y=z_1-b_1/(3a_1) \tag{11}$$

然后将式(11)代入式(2)、(3),按一元二次方程求根公式,即可求得式(1)的四个根。

2 计算中应注意的问题

对上述过程采用 FORTRAN 编译系统编制计算程序。首先注意到一个数的开立方计算。无论正数还是负数都可开立方,因而在编程中往往会忽视了负数开立方的计算问题,将 $b=\sqrt[3]{a}$ 用 FORTRAN 语句表示为 b = a * * (1. /3)了之。计算中发现,当 $a<0$ 时,该语句结果为 0,因而需改为 b = - (- a) * * (1. /3)。此外,还应注意到 1. /3 不能写成 1/3。这两个问题的致命点在于这种错误的写法确实符合我们正常的数学书写规则,且在计算机编译、运算中都不会出现错误提示,会令我们对错误的计算结果茫然失措。

其次注意到当式(10)中的 $\Delta<0$ 时,式(7)出现负数开平方,这显然在以实数作为运算变量的计算中是肯定错误的,这时须给 Δ 加一个负号,然后给其结果赋予虚数单位。于是式(7)的计算又转化为对$\sqrt[3]{u\pm v\mathrm{i}}$ 的计算。采用复数计算式

$$\omega=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}e^{\mathrm{i}\frac{1}{n}(\arg z+2k\pi)}\ (-\pi<\arg z<\pi,k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

并取第一个分枝,可得

$$\sqrt[3]{u+v\mathrm{i}}=\sqrt[6]{u^2+v^2}e^{\mathrm{i}\frac{1}{3}\arctan\frac{v}{u}};\sqrt[3]{u-v\mathrm{i}}=\sqrt[6]{u^2+v^2}e^{-\mathrm{i}\frac{1}{3}\arctan\frac{v}{u}}。$$

从而

$$\sqrt[3]{u+v\mathrm{i}}+\sqrt[3]{u-v\mathrm{i}}=2\sqrt[6]{u^2+v^2}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{v}{u}\right) \tag{12}$$

仍为实数。取 $u=-\frac{q}{2}$,$v=\sqrt{-\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right]}$,即可由式(12)算出式(7)的 z_1,进而依次算出式(1)的解。

3 扰动方程的特征根求解

飞机纵向及横航向扰动方程的特征方程可统一表示为

$$s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0 \tag{13}$$

其中系数 a_1、a_2、a_3、a_4 分别由飞机基准运动飞行参数以及飞机构造参数等所确定[2]。

对某歼击机，可得其纵向扰动方程的特征方程系数为 $a_1 = 6.296$，$a_2 = 947.7$，$a_3 = -17.99$，$a_4 = 8.983$。按上述方法，所得四个特征根依次为 $\lambda_{1,2} = -3.157\,520 \pm 30.624\,187\,\mathrm{i}$，$\lambda_{3,4} = 0.009\,520 \pm 0.096\,886\,\mathrm{i}$。

同理其横航向扰动方程的特征方程的系数分别为 $a_1 = 6.344$，$a_2 = 194.8$，$a_3 = 553.5$，$a_4 = 12.72$。按上述方法，可求出其四个特征根为

$$\lambda_1 = -2.972\,322, \lambda_2 = -0.023\,170\,0, \lambda_{3,4} = -1.674\,254 \pm 13.486\,941\,\mathrm{i}。$$

对于文献[3]给出的横航向扰动方程的特征方程系数为

$$a_1 = 5.851, a_2 = 186.6, a_3 = 517.8, a_4 = 15.90 \tag{14}$$

按上述方法，可求出其 4 个特征根为 $\lambda_1 = -2.877\,235\,2$，$\lambda_2 = -0.031\,054$，$\lambda_{3,4} = -1.471\,355 \pm 13.258\,488\,\mathrm{i}$。

将上述各根分别代入相应的方程(13)，所得误差的实部与虚部全部 $< 10^{-6}$，所以上述方法确实可视为精确解的求法。但需要指出的是上述计算在计算机的实现中都采用了双精度方法。虽然对于前两种情形，无论采用单精度或双精度，其结果都相差无几，但对于后一种情形，采用单精度时，所得四个特征根依次为

$$\lambda_1 = -3.100\,150, \lambda_2 = 0.191\,730, \lambda_{3,4} = -1.471\,290 \pm 13.284\,256\,\mathrm{i} \tag{15}$$

代入式(13)，相应的误差分别为 $-122.079\,597$，$122.079\,539$，$122.080\,627 \pm 0.000\,363\,\mathrm{i}$。可见式(15)根本不是式(13)相应于系数式(14)的精确解。因此，在应用上述方法对一般实系数四次方程或对飞机扰动运动特征方程求解时，最好采用双精度法。

4 结论

按照一元四次方程精确解求根公式，推导出了飞机扰动运动特征方程飞行模态的求解过程。从对文献[2]中两种典型扰动运动特征方程及文献[3]中一种扰动运动特征方程的精确求解以及误差计算，可以看出该求解过程及其计算机程序的正确性。从而有助于研究飞机扰动运动的稳定性特性，也有助于分析飞机设计中的各种气动特性的正确性，更有助于引导学生主动研究掌握相关的数值研究方法。

当然，对一元四次方程还可采用其它的数值方法，如方程分解法，林士谔—赵访熊劈因子法，拉盖尔法等。但对文献[2]中所给的上述两个算例的计算表明，在对横航向扰动运动方程的特征方程采用方程分解法及林士谔—赵访熊劈因子法时都遇到了迭代的不收敛问题，而拉盖尔方法虽然取得了与公式法相一致的结果，但收敛过程较慢。因此，本文讨论的公式求解法对学习研究扰动运动特征方程及其飞行动稳定性都具有一定的必要性与优越性。

参考文献：

[1] 数学手册编写组. 数学手册[M]. 北京：人民教育出版社，1979
[2] 林国华，朱永甫. 飞机飞行性能与控制[M]. 西安：空军工程学院，1997.
[3] 胡兆丰，何植岱，高　浩. 飞行动力学[M]. 北京：国防工业出版社，1985.

（编辑：姚树峰）

The Exact Solution of Characteristic Equation of Flight Disturbance Motion

ZHANG Jian - bang,　CHENG Bang - qin,　WANG Xu
(The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710038, China)

Abstract: This paper studies out the solving method of characteristic equation of disturbance motion by using the exact solution of quartic equation, and discusses some problems needing attention in computer programming. Through numerical test of some typical model of flight disturbance motion, it shows that the above method has obvious advantages in studying the model of flight .

Key words: disturbance motion; characteristic equation; model of flight; exact solution