压缩算子下线性方程组的非线性迭代算法

杨　军，　甄蜀春，　冯有前
(空军工程大学 导弹学院，陕西 三原　713800)

摘　要:利用压缩映射定理、不动点原理及矩阵的相关性质,对求解一般线性方程组问题进行了研究,导出了一种求解线性方程组的非线性迭代算法。特点是:无需对矩阵进行各种变换及求逆等运算,能始终保持收敛性且收敛速度较快。仿真结果表明,该算法稳定,收敛速度快,具有实用价值。

关键词:非线性迭代;压缩映射;不动点;矩阵范数;对角占优矩阵
中图分类号:TN015　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2001)06-0052-03

线性方程组的求解问题广泛存在于信号处理[1]中的系统辨识、线性预测、信号增强、滤波等方面,同时也存在于电磁场网络分析的参数估计问题中。求解线性方程组的方法一般分为两类[2],第一类为线性方程的直接解法,如高斯列主元消去法、对称正定矩阵的平方根法、三对角线方程组的追赶法等。这些方法都是针对特殊矩阵才能有效,同时当矩阵接近奇异时,参数估计存在较大误差。第二类是对矩阵进行变换后用迭代方法求其近似解。如Jacobi迭代法、Gauss-Seidel迭代法和SOR迭代法等,但这些方法或者是收敛,但其迭代格式(步长)是一定的,或者不能保证它收敛。为此,本文根据映射保证收敛的压缩映射定理以及经过映射后方程有解的不动点原理[3-4],在此基础上,为满足压缩映射定理所要求的条件,根据矩阵及其范数的相关性质[5],导出求解线性方程组的非线性迭代算法。该算法无需对矩阵进行各种变换,不需要对矩阵进行求逆等运算,同时该算法始终保持收敛性。最后通过仿真说明对该算法的特点及其有效性与收敛性。

1　非线性迭代算法

对于非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \tag{1}$$

其中$n\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$,$n\times 1$向量$\boldsymbol{b}$已知,$n\times 1$向量$\boldsymbol{x}$待求。且假设$a_{ii}\geqslant 0$,若a_{ii}不满足非负性,只需在方程组两边对应的行同时乘以-1即可获得。下面导出算法。

首先,在Banach空间C^n中构造映射[6]$f:C^n\rightarrow C^n$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

其中μ(步长)为待定常数,而对于定义域中的任意两个向量$\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in C^n$,有

$$\|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')\|=\|\boldsymbol{x}'+\mu(b-A\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{x}''-\mu(b-A\boldsymbol{x}'')\|=\|E-\mu A\|\ \|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\| \tag{3}$$

其中$\boldsymbol{E}$为单位对角矩阵,从上式及压缩映射定理[3-4]可知,则必须满足

$$\|\boldsymbol{E}-\mu\boldsymbol{A}\|<1 \tag{4}$$

在式(4)成立的情况下,$f(\boldsymbol{x})$具有唯一的不动点[3][4],且有下列非线性迭代式

$$x_{t+1}=x_t+\mu(\boldsymbol{b}-Ax_t),t=0,1,\cdots \tag{5}$$

可以证明用式(5)直接求μ与$\boldsymbol{A}$的关系,只有在$\boldsymbol{A}$为列对角占优时,μ才有解。为此,为使矩阵$\boldsymbol{A}$在一般情况下都成立,引入条件$\boldsymbol{E}-\mu\boldsymbol{A}$为列对角占优矩阵,即

$$|1-\mu a_{ii}|>|\mu|s\quad i=1,2,\cdots n \tag{6}$$

收稿日期:2000-09-06
作者简介:杨　军(1973-),男,湖北武汉人,博士生,主要从事天线及微波技术研究;
甄蜀春(1940-),男,四川盐亭人,教授,博士生导师,主要从事微波技术与智能检测研究.

其中 $s=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$。以下推导使上式成立的 μ 与 $\boldsymbol{A}$ 之间的关系。即求下列不等式

$$\begin{cases}\|\boldsymbol{E}-\mu\boldsymbol{A}\|<1\\ |1-\mu a_{ii}|>|\mu|s\end{cases}\tag{7}$$

根据式(7)可以导出

$$\begin{cases}2|1-\mu a_{ii}|<1\\ |1-\mu a_{ii}|>|\mu|s\end{cases}\tag{8}$$

从式(8)可得

$$\begin{cases}-1\dfrac{1}{2a_{ii}}<\mu<\dfrac{3}{2a_{ii}}\\ 0<\mu<\dfrac{1}{a_{ii}+s}\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}-1\dfrac{1}{2a_{ii}}<\mu<\dfrac{3}{2a_{ii}}\\ \mu<\dfrac{1}{a_{ii}-s}\\ a_{ii}<s\end{cases}\tag{9}$$

从式(9)可得

$$0<\mu<1/(a_{ii}+s)\tag{10}$$

所以有下式成立

$$0<\mu<1/\|\boldsymbol{A}\|\tag{11}$$

式(11)就是迭代算法收敛条件下步长的取值范围,在实际应用中为变大 μ 的取值范围且该范围与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的范数无关。为此,对方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 作如下变换

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}'\tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}/\|\boldsymbol{A}\|$,$\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}/\|\boldsymbol{A}\|$,此时 μ 的取值范围为

$$0<\mu<1\tag{13}$$

综上所述,该非线性迭代算法步骤为:1)设定初始值 μ,x_0,误差值 e;2)对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角元素非负化,且进行 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}/\|\boldsymbol{A}\|$,$\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}/\|\boldsymbol{A}\|$ 变换;3)用 x_t 按式(5)进行迭代计算 x_{t+1};4)如果 $|x_{t+1}-x_t|>1e$,返回 3),否则至 5);5)结束。

2　仿真及讨论

仿真例子来源于文献[1],表述如下:

自回归模型($AR(2)$)产生的序列 $x(n)$,$n=0,1,\cdots,N-1$

$$x(n)=1.558x(n-1)-0.81x(n-2)+v(n)\tag{14}$$

来估计该模型的参数 a_1,a_2(其真实值分别为 1.558 和 -0.81),其中输入 $v(n)$ 为一零均值高斯分布序列,N 为序列长度。根据随机信号及自回归模型的相关知识,可得如下方程:

$$\begin{bmatrix}R(0)&R(1)\\R(1)&R(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R(1)\\R(2)\end{bmatrix}\tag{15}$$

其中相关系数由下列计算式得到

$$R(m)=\frac{1}{N-|m|}\sum_{i=0}^{N-[m]-1}x(n-i)x(n-[m]-i)\quad,\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots\tag{16}$$

利用上述算法求式(15)中 a_1、a_2。同时在该算例中还做了算法的稳定性及不同步长下收敛速度的实验。结果见图 1 至图 4。其中图 1 为 $x(n)$ 的波形;图 2 为分别进行了 50 次独立实验(即 $v(n)$ 分别进行了 50 次序列长度均为 N 的情况下得到 50 次序列长度均为 N 的 $x(n)$,迭代次数为 200 次,步长取 0.7 时各次对应的参数估计,取其平均时估计为 $a_1=1.5611$、$a_2=-0.8125$,这里每次估计的参数值有微小起伏,原因在于模型输入为随机过程,并不是确定的序列。图 3 为步长取 0.95 时,50 次蒙特卡洛后的参数平均;图 4 为不同步长下迭代收敛曲线。

从图 1 至图 4 的仿真结果可得如下结论:1)该算法能准确估计出方程参数;2)该算法具有收敛速度较快,收敛稳定的特点;3)收敛步长的选取与矩阵无关,且对于任何方程组其值均在固定范围内((0　1))。

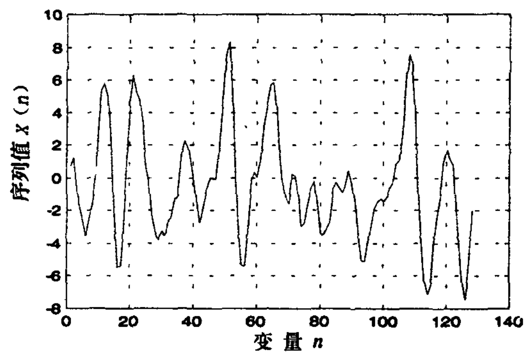


图 1 $x(n)$的波形

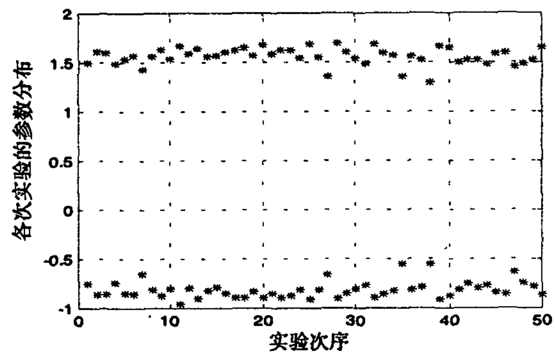


图 2 50 次独立实验迭代次数为 200 次，步长取 0.7 各次对应的参数估计

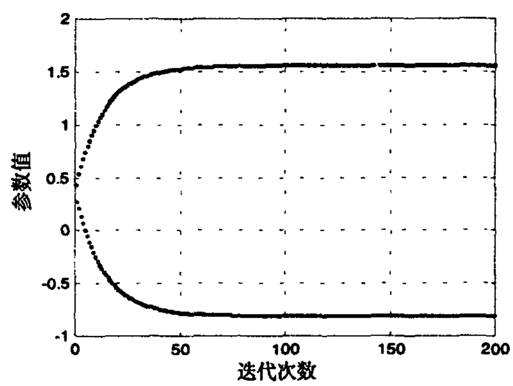
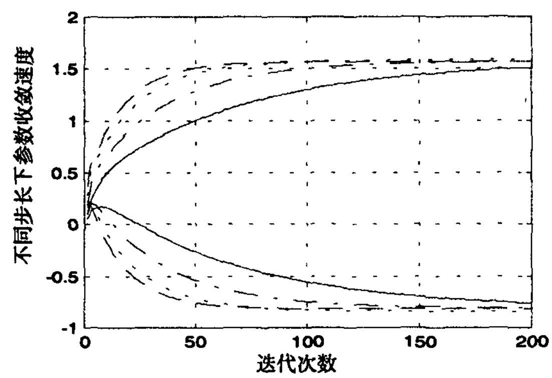


图 3 步长取 0.95,50 次蒙特卡洛后的参数平均的收敛曲线



“ - ”步长为 0.2 时收敛曲线,“ -. -. ”步长为 0.4 时收敛曲线,“…”步长为 0.6 时收敛曲线,“…”步长为 0.8 时收敛曲线

图 4 不同步长下迭代收敛曲线

参考文献:

[1] 陈尚勤,李晓峰. 快速自适应信号处理[M]. 北京:人民邮电出版社,1993.

[2] 宋国乡. 数值分析[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,1998.

[3] 于 寅. 近代数学基础[M]. 武汉: 华中理工大学出版社,1999.

[4] 陈景良. 近代分析数学概要[M]. 北京:清华大学出版社,1987.

[5] 吴海容. 工程矩阵分析(第 2 版)[M]. 哈尔滨:黑龙江省科学技术出版社,1998.

[6] 柳重堪. 信号处理的数学方法[M]. 南京:东南大学出版社,1992.

A Non - Linear Iterative Method for LEG Based on Contraction Mapping

YANG Jun, ZHEN Shu - chun, FENG You - qian

(The Missile Institute of the Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China)

Abstract: Solution to (LEG) Linear Equation Group problem is studied in this paper, and a non - linear iterative algorithm is deduced by using contraction mapping theorem, fixed point theory and related matrix properties. The algorithm has the advantages that do not need matrix transform, including matrix inverse operation, etc. At the same time, it has excellent convergence, strong convergent rate and practical application. The experimental results proved that the method is effective.

Key words: non - linear iteration; contraction mapping; fixed point; matrix norm; diagonal predominant matrix