第2卷第6期 空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版) Vol.2 No.6
2001年12月 JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION) Dec.2001

一类非线性不确定系统鲁棒 H^∞ 控制器的设计

贾秋玲， 何长安
(西北工业大学 自动控制系，陕西 西安 710072)

摘 要:利用微分对策方法,讨论了一类不确定性非线性控制系统的鲁棒 H^∞ 控制问题。给出了在所有允许的不确定范围内,使闭环系统具有鲁棒 H^∞ 控制特性的状态反馈鲁棒 H^∞ 控制器、输出反馈鲁棒 H^∞ 控制器以及基于观测器的鲁棒 H^∞ 控制的设计方法。指出了如果相应的一个或两个 Hamilton - Jacobi 不等式有非负解,则该不确定非线性系统的鲁棒 H^∞ 控制问题有解。

关键词:非线性系统;不确定性;鲁棒 H^∞ 控制;微分对策
中图分类号:TP13 **文献标识码**:A **文章编号**:1009 - 3516(2001)06 - 0037 - 04

非线性系统的鲁棒 H^∞ 控制在过去的几年中得到了很大的发展,也有一些作者对不确定非线性系统的鲁棒 H^∞ 控制作了各方面的研究,如文献[1]对于模有界的不确定非线性系统的鲁棒 H^∞ 控制作了研究,给出了与不确定项有关的状态反馈及输出反馈控制器;文献[2]设计了另一类不确定非线性系统的状态反馈及输出反馈控制器。与文献[1]不同的是本文利用微分对策方法,设计的控制器更简单,与不确定项无关。尽管本文设计的控制器与不确定项无关,它同样可以使闭环系统具有鲁棒 H^∞ 控制特性。

1 问题的提出

1.1 非线性系统模型

考虑如下非线性不确定系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \triangle f(x) + g_1(x)\omega + (g_2(x) + \triangle g_2(x))u \\ z &= h_1(x) + k_{12}(x)u \\ y &= h_2(x) + \triangle h_2(x) + k_{21}(x)\omega \end{aligned} \tag{1}$$

式中,$x(t) \in R^n$ 为状态($x(0)=0$),$y(t) \in R^p$ 是测量输出,$u(t) \in R^m$ 表示控制输入,$\omega(t) \in R^r$ 表示外部输入,$z(t) \in R^s$ 是被控输出信号。$f(x)$,$h_1(x)$,$h_2(x)$是光滑向量场,$g_1(x)$,$g_2(x)$,$k_{21}(x)$是光滑的具有适当维数的矩阵函数,并且满足$f(0)=0$,$h_1(0)=0$,$h_2(0)=0$. $\triangle f(x)$,$\triangle g_2(x)$,$\triangle h_2(x)$表示系统的不确定性,并满足下列假设:

假设1:

$$\Omega_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \triangle f(x) \\ \triangle h_2(x) \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \triangle f(x) \\ \triangle h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(x) \\ H_2(x) \end{bmatrix} F(x,t) E_1(x) \right\} \tag{2}$$

$$\Omega_2 = \{ \triangle h_2(x) \mid \triangle h_2(x) = H_1(x) F(x,t) E_2(x) \}$$

式中,$H_1(x)$,$H_2(x)$,$E_1(x)$和$E_2(x)$是已知的,具有适当维数的,表征系统不确定结构的矩阵函数,且$E_1(0)=0$,而且下式对任何已知的矩阵函数均成立:

$$\int_0^\infty (\| \Phi(x) \|^2 - \| F(x,t)\Phi(x) \|^2) \mathrm{d}t \geq 0 \tag{3}$$

(由式(3)给出的不确定条件实际上是一个范数有界条件 $\| F(x,t)\Phi(x) \|^2 \leq 1$[3])。为了便于分析,假

收稿日期:2001 - 07 - 06
基金项目:国家973重点发展研究项目(G1998030417)
作者简介:贾秋玲(1966 -),女,河南长葛人,博士生,主要从事非线性系统控制理论研究;
何长安(1937 -),男,教授,博士生导师,主要从事非线性系统控制理论研究.

设非线性系统满足下列常用假设：

假设 2：$k_{12}^{\mathrm{T}}(x)(h_1(x)\quad k_{12}(x))=(0\quad I)$；$k_{21}(x)(g_1{}^{\mathrm{T}}(x)\quad k_{21}{}^{\mathrm{T}}(x))=(0\quad I)$ (4)

1.2 非线性系统鲁棒 H^∞ 控制问题的提出

定义 1： 非线性系统 $\begin{cases}\dot{x}=f(x,u)\\ y=h(x)\end{cases}$ 在 $(x,u)=(0,0)$ 附近关于支持率 $s(u,y)=\gamma^2\|u\|^2-\|y\|^2$ 是局部耗散的是指存在非负光滑函数 $V(x)$，且 $V(0)=0$，并在 $(0,0)$ 的邻域内满足：$V_xf(x,u)-s(u,y)\leqslant 0$。

非线性系统鲁棒 H^∞ 控制问题：就是设计控制器，使得只要所有不确定项在界定范围内，相应的闭环系统在原点的某一邻域 $U\in R^n$ 内渐近稳定，并且只要系统(1)相应的状态轨迹不离开 U，系统相对于支持率 $s(\omega,z)=\gamma^2\|\omega\|^2-\|z\|^2$ 是局部耗散的[4]。

2 主要结果

2.1 基于状态反馈鲁棒 H^∞ 控制器的设计

定理 1：若系统(1)满足假设 1 和假设 2，并满足

条件 1 对任何 $\Delta f(x)\in\Omega_1$，$(f(x)+\Delta f(x),h_1(x))$ 是零状态可检测的；

条件 2 存在光滑函数 $\lambda=\lambda(x)>0$，使得下列 Hamilton - Jacobi 不等式

$$V_xf(x)+\frac{1}{4}V_x\Big[(\lambda+\frac{1}{\lambda}\|E_2(x)\|^2)H_1(x)H_1^{\mathrm{T}}(x)+\frac{1}{\gamma^2}g_1(x)g_1{}^{\mathrm{T}}(x)-(1-\lambda)g_2(x)g_2{}^{\mathrm{T}}(x)\Big]V_x^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\lambda}E_1^{\mathrm{T}}(x)E_1(x)+h_1^{\mathrm{T}}(x)h_1(x)\leqslant 0 \tag{5}$$

在 $x=0$ 的邻域内，有一光滑正定解 $V(x)$，则系统(1)的鲁棒 H^∞ 控制问题的非线性状态反馈控制器为

$$u(x)=\alpha_2(x)=-\frac{1}{2}g_2{}^{\mathrm{T}}(x)V_x^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

(式(5)中 $\|\cdot\|$ 为与向量范数 l_2 相容的矩阵范数，可取 Frobenius 范数。以下同。)

证明：

要寻找反馈控制律式(6)，使闭环系统式(1)～(6)关于支持率 $s(\omega,z)=\gamma^2\|\omega\|^2-\|z\|^2$ 是局部耗散的，可归结为零合微分对策问题。此时的 Hamiltonian 函数取为

$$H(x,V_x^{\mathrm{T}},\omega,u)=V_x(f(x)+\Delta f(x)+g_1(x)\omega+(g_2(x)+\Delta g_2(x))u)+\|z\|^2-\gamma^2\|\omega\|^2,$$

其鞍点为 $(\omega_*(x,V_x^{\mathrm{T}}),u_*(x,V_x^{\mathrm{T}}))$，其中 $\omega_*=\omega_*(x,V_x^{\mathrm{T}})=\alpha_1(x)=\frac{1}{2\gamma^2}g_1{}^{\mathrm{T}}(x)V_x^{\mathrm{T}}$，

$$u_*=u_*(x,V_x^{\mathrm{T}})=\alpha_2(x)+\Delta\alpha_2(x)=-\frac{1}{2}(g_2{}^{\mathrm{T}}(x)+\Delta g_2{}^{\mathrm{T}}(x))V_x^{\mathrm{T}}$$

令 $H_*(x,V_x^{\mathrm{T}})=H(x,V_x^{\mathrm{T}},\omega_*,u_*)$，则 $H(x,V_x^{\mathrm{T}},\omega,u)=H_*(x,V_x^{\mathrm{T}})+\|u-u_*\|^2-\gamma^2\|\omega-\omega_*\|^2$

$$H(x,V_x^{\mathrm{T}},\omega,\alpha_2(x))=V_x(f(x)+\Delta f(x)+g_1(x)\omega+(g_2(x)+\Delta g_2(x))\alpha_2(x))+\|z\|^2-\gamma^2\|\omega\|^2=$$

$$H_*(x,V_x^{\mathrm{T}})+\|\alpha_2(x)-u_*\|^2-\gamma^2\|\omega-\omega_*\|^2=H_*(x,V_x^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}\|\Delta g_2{}^{\mathrm{T}}(x))V_x^{\mathrm{T}}\|^2-\gamma^2\|\omega-\omega_*\|^2$$

式(5)成立，保证 $H_*(x,V_x^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}\|\Delta g_2{}^{\mathrm{T}}(x))V_x^{\mathrm{T}}\|^2\leqslant 0$ 成立，则

$$H(x,V_x^{\mathrm{T}},\omega,\alpha_2(x))=V_x(f(x)+\Delta f(x)+g_1(x)\omega+(g_2(x)+\Delta g_2(x))\alpha_2(x))+\|z\|^2-\gamma^2\|\omega\|^2\leqslant 0$$

所以，状态反馈控制器式(6)可使闭环系统关于支持率 $s(\omega,z)=\gamma^2\|\omega\|^2-\|z\|^2$ 是局部耗散的。

取 $V(x)$ 为 Lyapunov 函数，则 $V(x)\leqslant 0$，$\omega=0$ 时，$V(x)=0$ 意味着 $h_1(x(t))=0$，由假设系统零状态可观测，则 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。闭环系统在 $\omega=0$ 时是局部渐近稳定的。(证毕)

2.2 基于输出反馈鲁棒 H^∞ 控制器的设计

定理 2： 在假设 1 和假设 2 成立的条件下，进一步假设下列条件成立：

条件 3 $\xi=0$ 为系统 $\dot{\xi}=\alpha(\xi)$ 局部渐近稳定的平衡点；

条件 4 在 $R^n\times R^n$ 原点的某一邻域内存在半正定函数 $W(x,\xi)$，满足 $W(0,\xi)>0(\xi\neq 0)$，并且存在一个标量函数 $\mu=\mu(x)>0$，使得 $W(x,\xi)$ 满足下列 Hamilton - Jacobi 不等式

$$(W_x \quad W_\xi)f^e(x,\xi)+(W_x \quad W_\xi)R(x,\xi)(W_x \quad W_\xi)^T+q(x,\xi)\leqslant 0 \tag{7}$$

式中,

$$f^e(x,\xi)=\begin{bmatrix} f(x)+g_1(x)\alpha_1(x)+g_2(x)c(\xi) \\ a(\xi)+G(\xi)h_2(x) \end{bmatrix}$$

$$R(x,\xi)=\begin{bmatrix} 2\mu H_1(x)H_1^T(x)+\frac{1}{4\gamma^2}g_1(x)g_1^T(x) & 0 \\ 0 & G(\xi)(\mu H_2(x)H_2^T(x)+\frac{1}{4\gamma^2}I)G^T(\xi) \end{bmatrix}$$

$$q(x,\xi)=\frac{2E_1^T(x)E_1(x)+c^T(\xi)E_2^T(x)E_2(x)c(\xi)}{4\mu}+(1+\mu)\|c(\xi)-\alpha_2(x)\|^2+$$

$$\frac{1+\mu}{4\mu}\|E_2(x)\|^2V_xH_1(x)H_1^T(x)V_x^T$$

那么,动态输出反馈控制器

$$\dot{\xi}=a(\xi)+G(\xi)y$$
$$u=c(\xi) \tag{8}$$

使闭环系统式(1)~(8)具有鲁棒 H^∞ 特性。

证明:

由式(1)~(8)组成的闭环系统可写为($k_{21}(x)g_1^T(x)=0$)

$$\dot{x}^e=\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f(x)+\Delta f(x)+g_1(x)\alpha_1(x)+g_2(x)c(\xi)+\Delta g_2(x)c(\xi)-g_1(x)\alpha_1(x)+g_1(x)\omega \\ a(\xi)+G(\xi)h_2(x)+G(\xi)\Delta h_2(x)+G(\xi)k_{21}(x)\omega \end{bmatrix}$$

定义辅助系统为

$$\dot{x}^e=f^e(x,\xi)+\Delta f^e(x,\xi)+g^e(x,\xi)r$$
$$v=h^e(x^e)=\alpha_2(x)+\Delta\alpha_2(x)-c(\xi) \tag{9}$$

其中 $\Delta f^e(x,\xi)=\begin{bmatrix} \Delta f(x)+\Delta g_2(x)c(\xi) \\ G(\xi)\Delta h_2(x) \end{bmatrix}$; $g^e(x,\xi)=\begin{bmatrix} g_1(x) \\ G(\xi)k_{21}(x) \end{bmatrix}$, $r=\omega-\alpha_1(x)$

不等式(7)可使辅助系统有储备函数 $W(x^e)=W(x,\xi)$ 关于支持率 $s(r,v)=\gamma^2\|r\|^2-\|v\|^2$ 是耗散的,即 $(W_x \quad W_\xi)(f^e(x^e)+\Delta f^e(x^e)+g^e(x^e)r)+\|v\|^2-\gamma^2\|r\|^2\leqslant 0$ 成立,

此时如果选储备函数为 $U(x^e)=V(x)+W(x^e)$,则有

$$U_{x^e}(f^e(x^e)+\Delta f^e(x^e)+g^e(x^e)(\omega-\alpha_1(x)))+\|z\|^2-\gamma^2\|\omega\|^2=V_x(f(x)+\Delta f(x)+g_1(x)\omega+$$
$$(g_2(x)+\Delta g_2(x))c(\xi))+(W_x \quad W_\xi)(f^e(x^e)+\Delta f^e(x^e)+g^e(x^e)(\omega-\alpha_1(x)))+\|z\|^2-\gamma^2\|\omega\|^2\leqslant$$
$$H_*(x,V_x^T)+\|c(\xi)-\alpha_2(x)-\Delta\alpha_2(x)\|^2-\gamma^2\|\omega-\alpha_1(x)\|^2-\|c(\xi)-\alpha_2(x)-\Delta\alpha_2(x)\|^2+$$
$$\gamma^2\|\omega-\alpha_1(x)\|^2=H_*(x,V_x^T)\leqslant 0$$

所以闭环系统式(1)~(8)是关于支持率 $s(\omega,z)=\gamma^2\|\omega\|^2-\|z\|^2$ 耗散的。

关于闭环系统式(1)~(8)在 $\omega=0$ 时的渐近稳定性证明。可利用上式,$\dot{U}\leqslant-\|z\|^2\leqslant 0$。当$(x(t),\xi(t))$为闭环系统式(1)~(8)的解时,$\dot{U}=0$ 即 $\|z\|^2=0$ 说明 $h_1(x(t))=0$ 以及 $c(\xi(t))=0$。对系统 $\dot{x}=f(x)+\Delta f(x)$ 和 $\dot{\xi}=a(\xi)+G(\xi)(h_2(x)+\Delta h_2(x))$,当 $h_1(x(t))=0$ 以及假设系统零状态可观测,则 $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$。利用条件3及稳定性性质,得 $\lim_{t\to\infty}\xi(t)=0$,利用 Lasalle 不变性定理,可知系统是局部渐近稳定的。(定理证毕)

2.3 基于观测器的输出反馈鲁棒 H^∞ 控制器的设计

定理3:在定理2的条件下,假设

条件5 $\xi=0$ 为系统 $\dot{\xi}=f(\xi)+g_1(\xi)\alpha_1(\xi)+g_2(\xi)\alpha_2(\xi)-G(\xi)h_2(\xi)$ 局部稳定平衡点;

条件6 存在定义在 $x=0$ 的邻域中的 C^1 光滑正定函数 $V(x)$($V(0)=0$),光滑函数 $\lambda=\lambda(x)>0$,使 Hamilton-Jacobi 不等式(5)成立,且以 $R^n\times R^n$ 的原点的某一邻域内存在半正定函数 $W(x,\xi)$,满足 $W(0,\xi)>0(\xi\neq 0)$,并且存在一个标量函数 $\mu=\mu(x)>0$,使得 $W(x,\xi)$ 满足下列 Hamilton-Jacobi 不等式

$$(W_x \quad W_\xi)f^*(x,\xi)+(W_x \quad W_\xi)R^*(x,\xi)(W_x \quad W_\xi)^T+q^*(x,\xi)\leqslant 0 \tag{10}$$

式中,

$$f^*(x,\xi)=\begin{bmatrix}f(x)+g_1(x)\alpha_1(x)+g_2(x)\alpha_2(\xi)\\ f(\xi)+g_1(\xi)\alpha_1(\xi)+g_2(\xi)\alpha_2(\xi)+G(\xi)h_2(\xi)-G(\xi)h_2(\xi)\end{bmatrix}$$

$$R^*(x,\xi)=\begin{bmatrix}2\mu H_1(\hat{x})H_1^T(x)+\frac{1}{4\gamma^2}g_1(x)g_1^T(x) & 0\\ 0 & G(\xi)(\mu H_2(x)H_2^T(x)+\frac{1}{4\gamma^2}I)G^T(\xi)\end{bmatrix}$$

$$q^*(x,\xi)=\frac{2E_1^T(x)E_1(x)+\alpha_2^T(\xi)E_2^T(x)E_2(x)\alpha_2(\xi)}{4\mu}+$$

$$(1+\mu)\|\alpha_2(\xi)-\alpha_2(x)\|^2+\frac{1+\mu}{4\mu}\|E_2(x)\|^2V_xH_1(x)H_1^T(x)V_x^T$$

那么,基于观测器的动态输出反馈控制

$$\begin{aligned}&\dot{\xi}=f(\xi)+g_1(\xi)\alpha_1(\xi)+g_2(\xi)\alpha_2(\xi)+G(\xi)(y-h_2(\xi))\\&u=\alpha_2(\xi)\end{aligned}\qquad(11)$$

可以使闭环系统式(1)~(11)具有鲁棒 H^∞ 特性。

证明:

若取 $a(\xi)=f(\xi)+g_1(\xi)\alpha_1(\xi)+g_2(\xi)\alpha_2(\xi)-G(\xi)h_2(\xi)$,$c(\xi)=\alpha_2(\xi)$。利用定理2,即可得证。

3 结论

本文利用微分对策方法,讨论了一类非线性不确定系统的鲁棒 H^∞ 控制问题,得到了鲁棒 H^∞ 控制问题可解的充分条件,给出了基于状态反馈的鲁棒 H^∞ 控制器,基于输出反馈的鲁棒 H^∞ 控制器以及基于观测器的输出反馈的鲁棒 H^∞ 控制器的设计方法,本文所介绍的所有这些的鲁棒 H^∞ 控制器均可实现系统的内部镇定及干扰抑制。

参考文献:

[1] 费树岷,霍 伟. 非线性系统的输出反馈鲁棒 H∞ 控制[J]. 北京航空航天大学学报,1995,21(3):96-101.

[2] 陆国平,郑毓蕃. 一类非线性不确定系统的鲁棒 H∞ 控制[J]. 自动化学报,1999,25(3):388-392.

[3] Sing Kiong Nguang. Robust Nonlinear H∞ - Output Feedback Control[J]. IEEE Trans on AC,1996,41(7):1003-1007.

[4] Isidori A,Wei Kang. H∞ Control via Measurement Feedback for General Nonlinear Systems. [J]. IEEE Trans on AC,1995,40(3):466-472.

[5] Isidori A. Control via Measurement Feedback for Affine Nonlinear System. [J]. International Journal of Robust and Nonlinear control,1994,55(4):553-574.

Design of Robust H∞ Controller for a Class of Nonlinear Uncertain System

JIA Qiu-ling, HE Chang-an

(Department of Automatic Control,Northwestern Polytechnical University,Xi'an,710072,China)

Abstract: Robust H∞ controller via state feedback as well as via output feedback for a class of nonlinear systems with uncertainty is discussed by means of two player,zero sum,differential game. The sufficient conditions of the solution existence for the H∞ control problems of such case of uncertain nonlinear systems are presented. It is proved that all the controllers proposed in this paper can make the closed loop systems with uncertainty achieve disturbance attenuation with internal stability.

Key words: nonlinear system; uncertainty; robust H∞ control; differential game.