离散周期信号的改进型内插重构公式

刘 鹏, 王革命, 吴明江
(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

摘 要:信号重构主要研究如何从观测得到的部分数据来重构原信号。针对原有离散周期信号时域重构公式的缺陷,找到了借助于DFT的内插重构公式,该公式与原有公式相比可在任意时间点重构出原信号,计算结果表明这种内插重构公式重构效果较好。

关键词:离散周期信号;内插重构;离散付里叶变换(DFT)
中图分类号:TN911　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2001)03-51-53

信号的重构在图象处理、地震勘探、通信系统等领域内有着广泛的应用,它主要研究如何从观测得到的部分数据来重构信号。针对不同类型的信号,已经有不同类型的重构方法。但对离散周期信号的重构讨论较少,本文针对离散周期信号时域重构公式的缺陷,找到了借助于DFT的内插重构算法。

1 时域内插重构公式

设$x[n]$为周期为N的离散周期序列。则其重构公式为[1]

$$x(t)=\frac{\sin(\pi t)}{N}\sum_{n=-L}^{M-1}x[n](-1)^n\mathrm{ctg}\left(\pi\frac{t-n}{N}\right)\qquad N\text{为偶}\tag{1a}$$

$$x(t)=\frac{\sin(\pi t)}{N}\sum_{n=-L}^{M-1}x[n](-1)^n\csc\left(\pi\frac{t-n}{N}\right)\qquad N\text{为奇}\tag{1b}$$

但进行具体数值计算时,在特定条件下会出现数值不稳定点。原因在于(1a)、(1b)两式中当$t-n=mN$时,$\sin(m\pi)=0$,出现分母为零的奇异点。为了克服这种缺陷,下面寻求离散周期信号内插重构的其它公式。

2 借助于DFT的内插重构公式

设$x[n]$是周期为N的离散周期序列,L、M为任意的正整数,且$L+M=N$,则$x[n]$的离散付里叶变换(DFT)$X[k]$为[2]

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j(2\pi nk/N)}=\sum_{n=-L}^{M-1}x[n]e^{-j(2\pi nk/N)}\qquad k=0,1,2,\cdots,N-1\tag{2a}$$

反离散付里叶变换(IDFT)为

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j(2\pi nk/N)}\qquad n=0,1,2,\cdots,N-1\tag{2b}$$

$X[k]$的极座标形式为:$X[k]=|X[k]|e^{j\angle X[k]}$, $-\pi<\angle X[k]\leq\pi$。下面先给出借助于*DFT*的离散周期信号的内插重构公式,然后予以证明。借助于*DFT*的离散周期信号的内插重构公式为

$$x(t)=\sum_{k=0}^{N-1}A[k]X[k]e^{j(2\pi kt/NT)}\tag{3}$$

$A[k]$为加权系数,公式为

收稿日期:2000-06-12
作者简介:刘 鹏(1962-),男,陕西神木人,副教授,硕士,主要从事电路、信号与系统研究.

$$A[k]=\begin{cases}\dfrac{1}{N} & k=0,1,\cdots,\dfrac{N}{2}-1\\ \dfrac{1}{2N}(1+e^{-j2\pi t/T}) & k=N/2 \qquad N\text{为偶}\\ \dfrac{1}{N}e^{-j2\pi t/T} & \text{其它}\end{cases}$$

$$A[k]=\begin{cases}\dfrac{1}{N} & k=0,1,\cdots,\dfrac{N-1}{2} \qquad N\text{为奇}\\ \dfrac{1}{N}e^{-j2\pi t/T} & \text{其它}\end{cases}$$

下面证明(3)式,为证明方便取 T = 1,将(3)式展开得

$$x(t)=\frac{1}{N}\left\{X[0]+\frac{1}{2}X\left[\frac{N}{2}\right][e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}]+\sum_{k=1}^{(\frac{N}{2})-1}X[k]e^{j2\pi kt/N}+\sum_{k=(\frac{N}{2})+1}^{N-1}X[k]e^{j2\pi kt/N}e^{-2j\pi t}\right\}=$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=-L}^{M-1}x[n]\left\{1+\frac{1}{2}e^{-jn\pi}[e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}]+\sum_{k=1}^{(\frac{N}{2})-1}e^{j2\pi/N(t-n)k}+e^{-j2\pi t}\sum_{k=(\frac{N}{2})+1}^{N-1}e^{j2\pi/N(t-n)k}\right\}$$

利用等比级数求和公式及 $e^{\pm j\pi n}=(-1)^n$,上式可以整理为

$$\frac{1}{N}\sum_{n=-L}^{M-1}x[n](-1)^n\left\{\frac{[1+e^{j2\pi/N(t-n)}][e^{-j\pi t}-e^{j\pi t}]}{[1-e^{j2\pi/N(t-n)}]}\right\}=$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=-L}^{M-1}x[n](-1)^n\left\{\frac{[e^{-j\pi/N(t-n)}+e^{j\pi/N(t-n)}][e^{-j\pi t}-e^{j\pi t}]}{[e^{-j\pi/N(t-n)}-e^{j\pi/N(t-n)}]}\right\}=$$

$$\frac{\sin(\pi t)}{N}\sum_{n=-L}^{M-1}x[n](-1)^n\mathrm{ctg}\pi(t-n)/N \qquad N\text{为偶}$$

上式与(1*a*)式相同,N 为奇时类似可推出(1*b*)式。当 T≠1 时只要做简单的变量代换即可证明(2)式。当 t = nT 时,可以看出 A[K] = 1/N(K = 0,1,2,…,N - 1),(3)式演变为(2*b*)式即 *IDFT*。当 x(t)为实信号时,(3)式可简化为

$$x(t)=\sum_{k=0}^{Q}B[k]\,|X[k]|\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\cdot\frac{t}{T}+\angle X[k]\right) \tag{4}$$

$$B(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{N} & k=0,\dfrac{N}{2}\\ \dfrac{2}{N} & \text{其它}\end{cases}$$

Q = *INT*[N/2]。下面证明(4)式,当 N 为偶时,Q = N/2,由(3)式有

$$x(t)=\frac{1}{N}\left\{X[0]+\frac{1}{2}X\left[\frac{N}{2}\right][e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}]+\sum_{k=1}^{(\frac{N}{2})-1}X[k]e^{j2\pi kt/N}+\sum_{k=(\frac{N}{2})+1}^{N-1}X[k]e^{j2\pi kt/N}e^{-2j\pi t}\right\}=$$

$$\frac{1}{N}\left\{|X[0]|e^{j\angle X[0]}+\frac{1}{2}\left|X\left[\frac{N}{2}\right]\right|e^{j\angle X[N/2]}[e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}]\right\}+$$

$$\sum_{k=1}^{(\frac{N}{2})-1}|X[k]|e^{j\angle X[k]}e^{j2\pi kt/N}+\sum_{k=(\frac{N}{2})+1}^{N-1}|X[k]|e^{j\angle X[k]}e^{j2\pi kt/N}e^{-j2\pi t}$$

对最后一项求和,做变量代换 k' = N - k,则有

$$x(t)=\frac{1}{N}\left\{|X[0]|e^{j\angle X[0]}+\frac{1}{2}\left|X\left[\frac{N}{2}\right]\right|e^{j\angle X[N]2}[e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}]+\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{(\frac{N}{2})-1}|X[k]|e^{j\angle X[k]}e^{j2\pi kt/N}+\sum_{k=(\frac{N}{2})-1}^{N-1}|X[N-k]|e^{j\angle X[N-k]}e^{j2\pi(N-k)t/N}e^{-j2\pi t}\right\}$$

由 *DFT* 性质有 $|X(N-k)|=|X(k)|$, $\angle X(N-k)=-\angle X(k)$, $\angle X(N/2)=-\angle X(N/2)$[1], 则

$$x(t)=\frac{1}{N}\Big\{X[0]\,|\,e^{j\angle X[0]}+\frac{1}{2}\left|X\left[\frac{N}{2}\right]\right|e^{j\angle X[N/2]}e^{j\pi t}+\frac{1}{2}\left|X\left[\frac{N}{2}\right]\right|e^{-j\angle X[N/2]}e^{-j\pi t}+$$

$$\sum_{k=1}^{(\frac{N}{2})-1}|X[k]|\,e^{j\angle X[k]}e^{j2\pi kt/N}+\sum_{k=1}^{(\frac{N}{2})-1}|X[k]|\,e^{-j\angle X[k]}e^{-j2\pi kt/N}\Big\}=$$

$$\frac{1}{N}|X(0)|\cos(\angle X[0])+\frac{1}{N}\left|X\left(\frac{N}{2}\right)\right|\cos\left(\pi t+\angle X\left[\frac{N}{2}\right]\right)+\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{(\frac{N}{2})-1}|X[k]|\cos\left(\frac{2\pi kt}{N}+\angle X[k]\right)$$

上式与(3)式展开后相同,N为奇时可以类似证明。下面进行具体信号重构,设$N=16$的离散周期信号$x[n]$在第一个周期的表达式为

$$x_0[n]=\begin{cases}1 & 0\leqslant n<8\\ 0 & 8\leqslant n\leqslant 15\end{cases}$$

其图形如图1所示,使用(4)式重构后所做的图形如图2所示。

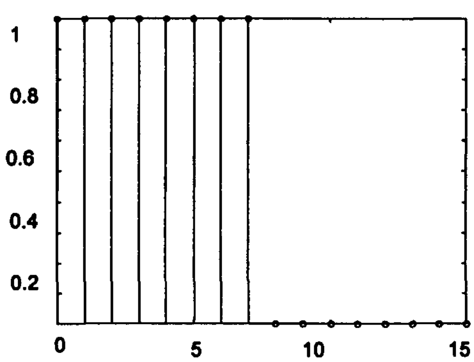

图1　$N=16$的离散周期信号

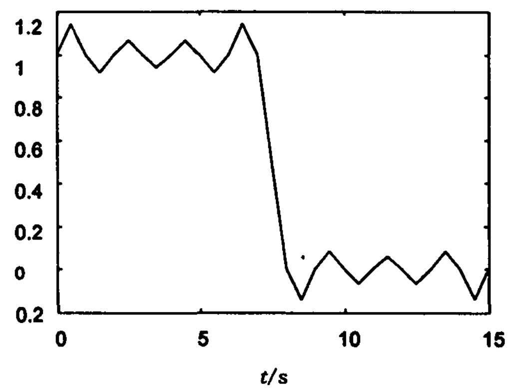

图2　离散周期信号的重构图形

3　结论

本文借助于DFT的离散周期信号得到的的内插重构公式比原有时域公式有了较大的改进,主要优点是可在任意时间点重构出原信号,通过实例分析可看出这种重构公式的重构效果较好,对实际工程问题会有一定帮助。当周期N较大时,可利用FFT提高计算速度。

参考文献:

[1]　刘　鹏,陈长兴.离散周期信号的内插重构公式[J].陕西师范大学学报,2000,28(增刊):84-86.
[2]　帕波利斯 A.信号分析[M].北京:海洋出版社,1981.

The Improvement Interpolation Formula of Discrete Periodic Signals

LIU Peng,　WANG Ge-ming,　WU Ming-jiang
(The Missile Institute of the Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China)

Abstract: The main purpose of signal reconstruction is how to reconstruct signals from observed portion dates. Aimed at the disadvantage of time reconstruction formula of discrete periodic signals, a new formula with the help of Discrete Fourier Transforms (DFT) is obtained. Compared with the time reconstruction formula, this new formula can reconstruct signals at any time. The calculating result shows that the reconstruction effect of this new formula is much better.

Key words: discrete periodic signals; interpolation reconstruction; discrete fourier transforms