有假信号干扰时的最优搜索

刘 红, 寇光兴
(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

摘 要:研究了在假信号干扰下搜索某区域内目标的问题,在将搜索目标的过程分为信号的获取阶段和鉴别阶段之后,利用本文建立的最优搜索模型,给出了求最优终止时间的算法。

关键词:搜索;假信号;最优终止时间
中图分类号:O299　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2001)03-26-29

考虑 T 时间内在某区域 A 内搜索一个目标的问题[1]。假设搜索者不时受到与真信号发出的非常相似的假信号的干扰,因此搜索过程分为两个阶段:第一阶段是信号的获取过程;第二阶段是对所获取的信号的鉴别过程。一般地,假信号分为两类:一类是由一个与真目标相近的实际物体发出的,另一类是由系统噪声及背景噪声引起的。对后者,由于没有实际物体作参考,通常不易鉴别。为此,当第二阶段持续较长时间仍没有发现真目标,即应适时中止该阶段,转而重新获取新的信号。下面研究根据获取的信号是来自真目标的可能性的大小(即可信度),来确定终止第二阶段搜索的最佳时间。

1 模型的假设

对上述问题,作如下假设:

1)目标在区域 A 中服从均匀分布,捕获信号的过程是随机的泊松搜索过程,搜索速度为 v,探测器的扫描宽度为 w,则搜索者接触到真目标的泊松参数为:$\lambda_0 = vw/A$

2)搜索时间是连续的,且不超过 T,采用倒计时的方式,即搜索时间是 t 表示距搜索结束还剩余时间 t。显然,$t = T$ 表示搜索开始,$t = 0$ 表示搜索结束。

3)搜索者在第一阶段捕获到信号的泊松参数为 λ,该信号的可信度为 p,捕获到假信号的泊松参数为 λ_1,故:$\lambda = \lambda_0 p + \lambda_1$

4)接收到信号后,转向第二阶段鉴别该信号是否真目标,假设此期间没有收到新的信号。

5)第二阶段搜索时间 X 的分布函数为 $F(x)$,概率密度函数为 $f(x)$。

6)若第二阶段持续时间很长,仍没有探测到真目标,则怀疑该信号的真实性,停止该阶段的搜索,转而重新捕获信号。

令 $Z(x)$ 表示对时间 t 捕获到的信号进行第二阶段搜索所选的停止时间,称

$$\{Z(t), 0 \leqslant Z(t) \leqslant t, 0 \leqslant t \leqslant T\}$$

为一个搜索计划,$Z^*(t)$ 为 $Z(t)$ 的最优值。

$P(t)$ 表示用最优搜索计划探测到目标的概率,从而上述问题可用下式描述:

$$P(t + \triangle t) = (1 - \lambda \triangle t)P(t) + \lambda \triangle t \max G(Z(t)) \qquad 0 \leqslant Z(t) \leqslant t \tag{1}$$

其中,
$$G(Z(t)) = p \cdot F(Z(t)) + (1 - p \cdot F(Z(t)))P(t - Z(t)) \tag{2}$$

表示 t 时获取信号且终止搜索时间为 $Z(t)$ 的条件探测概率。

则由(1)得:

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{P(t + \triangle t) - P(t)}{\triangle t} = \lambda[G(Z^*(t)) - P(t)] \tag{3}$$

收稿日期:2000-05-01
作者简介:刘 红(1966-),女,天津人,副教授,硕士,主要从事应用数学研究.

其中,

$$G(Z^*(t)) = \max_{0 \leqslant Z(t) \leqslant t} G(Z(t)) \tag{4}$$

$t=0$ 及 $t=T$ 分别取$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}$的左右导数。

易知,

$$P(0)=0 \tag{5}$$

综合上述,得由(2)~(5)式给出的模型。

2 最优搜索计划

引理[2]:t 一定时,$G(Z)$满足:

1) $$G(0)=P(t)\geqslant 0 \quad G(t)=pF(t)\geqslant 0$$

2) $$G'(0)=pf(0)(1-P(t))-P'(t)\geqslant[1-P(t)][pf(0)-\lambda] \tag{6}$$

$$G'(t)=pf(t)\geqslant 0 \tag{7}$$

证明:1)据2)式,并注意到 $F(0)=0, P(0)=0$ 有

$$G(0) = pF(0) + [1-pF(0)]P(t) = P(t) G(t) = pF(t) + [1-pF(t)]P(0) = pF(t)$$

2)因 $F(Z)$连续可微则 $G(Z)$也可微,故

$$\begin{aligned}G'(Z) &= pF'(Z) - pF'(Z)P(t-Z) - (1-PF(Z))P'(t-Z) = \\ &pf(Z) - pf(Z)P(t-Z) - (1-PF(Z))\lambda[G(Z^*) - P(t-Z)] = \\ &pf(Z)(1-P(t-Z)) - (1-PF(Z))\lambda[G(Z^*) - P(t-Z)] \geqslant \\ &pf(Z)(1-P(t-Z)) - (1-PF(Z))\lambda(1-P(t-Z)) = \\ &[1-P(t-Z)][pF(Z) - \lambda(1-pF(Z))]\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}G'(0) &= pF(0)[1-P(t)] - [1-pF(0)]P'(t) = \\ &pF(0)[1-P(t)] - P'(t) \geqslant \\ &[1-P(t)][pf(0) - \lambda(1-pF(0))] = \\ &[1-P(t)][pf(0) - \lambda]\end{aligned}$$

$$G'(t) = Pf(t) - Pf(t)P(0) - (1-pF(t))P'(0) = pf(t) \geqslant 0$$

规定,$G(Z)$存在极值时,$Z^0(t)$为 $G(Z)$在$(0,t)$内的极值点;当 $G(Z)$不存在极值时,$Z^0(t)=0$

据上述分析,可由下面定理确定最优搜索计划。

定理1:(1)若 $Z^0\neq 0$,必为方程

$$\frac{pf(Z)}{1-pF(Z)} = \frac{P'(t-Z)}{1-P(t-Z)} \tag{8}$$

的解。

证明:1) 在(7) 式中令 $G'(Z)=0$,得

$$pf(Z)(1-P(t-Z)) - (1-pF(Z)) - (1-pF(Z))P'(t-Z) = 0$$

即

$$\frac{pf(Z)}{1-pF(Z)} = \frac{P'(t-Z)}{1-P(t-Z)}$$

2) 用反证法。设 $Z^*(t)=0$,由(2) 式得

$$G(Z^*(t)) = G(0) = pF(0) + (1-pF(0))P(t) = P(t)$$

由(3)式得

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda[G(Z^*(t)) - P(t)] = 0$$

故,$P(t)\equiv C$(常数),而 $P(0)=0$,因此 $P(t)\equiv 0$,与 $Z^*(t)$的定义矛盾,从而 $Z^*(t)\neq 0$,且 $Z^*(t)=Z^0(t)$或

t,即

$$G(Z^*(t)) = \max\{G(Z^0(t)), G(t)\}$$

并且,

$$G(Z^*(t)) > G(0) = P(t)$$

此表明,所有收到的信号都要转入第二阶段进行鉴别真假。

为更方便地求最优终止时间 $Z^*(t)$,令:

$$\hat{t} = \min\{t \mid \exists Z^0(t)\} \tag{9}$$

$$\tilde{t} = \min\{t \mid \exists Z^0(t) \text{ 且 } G(Z^0(t)) \geqslant G(t)\} \tag{10}$$

其中,$\hat{t}$ 是使 $G(Z(t))$有极值的最小时刻,$\tilde{t}$ 是满足 $G(Z^0(t)) \geqslant G(\tilde{t})$ 的 $G(Z)$ 极大值点中最小时刻。易得

引理 2:若 $\hat{t}, \tilde{t}$ 存在,则 $\hat{t} \leqslant \tilde{t}$

推论 1 · $$Z^*(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leqslant \tilde{t} \\ Z^0(t) & t > \tilde{t} \end{cases} \tag{11}$$

其中,$Z^0(t)$是(8)的解。

证明:据 $\tilde{t}$ 的定义,当 $0 < t \leqslant \tilde{t}$,$G(Z^0(t)) < G(t)$且由定理 1 知:$Z^*(t) = t$

当 $\tilde{t} < t$ 时,$Z^*(t) = Z^0(t)$

在许多实际应用中,通常$\frac{pf(Z)}{1 - pF(Z)}$是 Z 的减数,且一般大于捕获信号的泊松参数 λ,故

$$\max_{z} \frac{pf(Z)}{1 - pF(Z)} = \frac{pf(0)}{1 - pF(0)} = pf(0) > \lambda$$

此时,有下述性质:

推论 2:设 $pf(0) > \lambda$,则 $G(Z)$满足:

1)$G(Z)$在 $Z = 0$ 的某领域内递增,即 $G'(0) > 0$。

2)设上述 $\hat{t}, \tilde{t}$ 存在,则当 $0 < t \leqslant \hat{t}$ 时,$G(Z)$在$[0,t]$上严格递增;当 $\hat{t} \leqslant t < t$ 时,$G(Z)$至少存在一个极大值点 Z^0;当 $t \geqslant \tilde{t}$ 时,$\max G(Z) = G(Z^0)$

3)若 $G(Z)$有一个极大值,则必存在极小值。

证明:1)由(6)式及 $\rho f(0) > \lambda$,得:

$$G'(0) \geqslant (1 - p(t))\rho f(0) > \lambda$$

2)由假设,$\exists \hat{t} > 0$ 及 $\hat{t} = \min\{t \mid \exists Z^0(t)\}$知,当 $0 \leqslant t < \hat{t}$ 时,$G'(Z) > 0$,即 $G(Z)$在$[0,t]$上严格递增。

$\hat{t} \leqslant t < \tilde{t}$ 时,$G(Z)$在此区间内有极大值,且因 $t < \tilde{t}$ 时,$G(Z^0(t)) < G(t)$,$G(Z)$至少存在一个极大值点 Z^0。

当 $t \geq \tilde{t}$ 时,$G(Z)$的最大值在 Z^0 处达到。

3)若 $t > \hat{t}$,$G(Z)$存在极大值,且 $G'(Z) < 0 \quad (Z^0 < Z < Z^0 + \triangle Z)$,据引理 1 的 2)有,

$$G'(t) \doteq pf(t) > 0$$

$G'(Z)$在(Z^0, t)上至少改变符号一次,因此 $G(Z)$在此区间内存在极小值。

利用上述规则,可以确定最优终止搜索时间 $Z^*(t)$。特别地,当 t 很大时,有下述结论:

定理 2:当 $t \gg \tilde{t}$ 时,Z^* 接近于常数。

证明:当 $A \gg \hat{A}$ 时,由(8)式知

$$\frac{pf(Z^0)}{1 - pF(Z^0)} = \frac{P'(t - Z^0)}{1 - P(t - Z^0)}$$

代入(3)式及(2)式得,

$$\frac{pf(Z^0)}{1-pF(Z^0)}=\frac{\lambda[G(Z^*(t-Z^0))-P(t-Z^0)]}{1-P(t-Z^0)}=$$
$$\frac{\lambda\{pF(Z^0)+(1-pF(Z^0))P(t-2Z^0)-P(t-Z^0)\}}{1-P(t-Z^0)} \tag{12}$$

由于,据(8)式,

$$P(t-2Z^0)=P(t-Z^0)-P'(t-Z^0)Z^0=P(t-Z^0)-\frac{pf(Z^0)(1-P(t-Z^0))Z^0}{1-pF(Z^0)}$$

从而,$P(t-2Z^0)(1-pF(Z^0))=P(t-Z^0)(1-pF(Z^0))-pf(Z^0)Z^0+pf(Z^0)P(t-Z^0)Z^0$

代入(12)式得,

$$\frac{pf(Z^0)}{1-pF(Z^0)}=$$
$$\frac{\lambda\{pF(Z^0)+P(t-Z^0)-pF(Z^0)P(t-Z^0)-pf(Z^0)Z^0+pf(Z^0)Z^0P(t-Z^0)-P(t-Z^0)\}}{1-P(t-Z^0)}\doteq$$
$$\lambda\{pF(Z^0)-f(Z^0)Z^0)\} \tag{13}$$

即对充分大的 t,(8)式变为

$$\frac{pf(Z^0)}{1-pF(Z^0)}=\lambda\{pF(Z^0)-f(Z^0)Z^0)\}$$

由于上式不依赖于 t,方程的解 Z^0 与 t 无关,因此 t 充分大时,Z^0 趋于常数。

据定理2可得下述推论。

推论3:若 $F(Z)$ 是 Z 的严格凸函数,$f(0)>0$,且$\frac{pf(Z)}{1-pF(Z)}$是 Z 的严格递减函数,则 $t\gg t$ 时,Z^0 的近似值由下式唯一解给出:

$$\frac{f(Z)}{1-pF(Z)}=\lambda\{F(Z)-Zf(Z)\} \tag{14}$$

证明:据题设知,(14)式左边是 Z 的严格递减函数,且因 $f'(Z)=F''(Z)<0$,(14)式右边严格递增,而等式左端在 $Z=0$ 处的值 $f(0)$ 大于等式右边在 $Z=0$ 处的值零,因此(14)有唯一解,Z^0 即为其解。

3　结论

由以上讨论得,在给定可信度条件下,可利用定理1及定理2来确定最优搜索终止时间。

参考文献:

[1] Koopman. Bernard. Search and Screening[M]. New York:Pergamon Press,1980.

[2] IidaK,Hohzaki R KaihoT. Optimal Investigating Search Maximizing the Detection Probability[J]. Journal of the Operations Research Society of Japan. 1997,40(3):294 - 309.

[3] 张　之. 搜索论[M]. 大连:大连理工大学出版社,1993.

Optimal Search with False Signal

LIU Hong,　KOU Guang - xing

(The Missile Institute of the Air Force Engineering Universlty,Sanyuan 713800,China)

Abstract:In this paper,a search problem for a target in an area being interfered by false signal is considered. A search process is divided by two stages,which are the signal's gaining and in vestigating,and conditions of the optimal investigating time being terminated has been given by this model.

Key words:search;false signal;optimal terminating time