一类非线性抛物型方程的边界积分公式

冀礼鹏，　李炳杰
(空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安　710077)

摘　要:利用 Kirchhoff 积分变换将二维非线性抛物型方程化为等价的线性形式,得到该方程的边界积分方程与边界变分方程。除了利用 lax-milgram 定理证明变分方程解的唯一性外,还利用分段线性插值方法得到非线性系数以离散方式给出的积分变换表达式。

关键词:Kirchhoff 变换;边界分方程;边界变分方程;lax-milgram 定理
中图分类号:O241.8　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2001)01-0092-03

一般情况下,Kirchhoff 积分变换不能保证积分算子单且满,但在热传导材料系数非负情形下确可以保证这一点[1~2]。如果材料系数以离散方式给出,则可利用分段插值方法给出其近似表达式,此时,问题将更加简单明了。本文利用 Kirchhoff 积分变换变二维非线性抛物型方程为线性形式。给出该线性形式的边界积分方程与变分公式,并证明变分方程解的存在唯一性。由同构积分映射得到原方程解的存在唯一性。

1　控制方程

考虑二维非线性抛物型方程初边值问题

$$\begin{cases} a(u)\dfrac{\partial u}{\partial t} - D\dfrac{\partial}{\partial x}(a(u)\dfrac{\partial u}{\partial t}) - D\dfrac{\partial}{\partial y}(a(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}) = f(x,y,t) & (x,y)\in\Omega\cup\Omega'\subset\mathbf{R}^2, t\in\mathbf{I} \\ u(x,y,t) = \bar{u}(x,y,t) & (x,y,t)\in\Gamma\times\mathbf{I} \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) & (x,y)\in\mathbf{R}^2 \end{cases} \tag{1}$$

这里 $a(u)>0$ 为材料系数(依赖于 u),D 为热传导系数,Γ 为区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 的边界,$\mathbf{I}[0,T]$。Ω' 为 Ω 的外域,作 Kirchhoff 积分变换。

$$\varphi = K(u) = \int_{u_0}^{u} a(u)\mathrm{d}u \tag{2}$$

其中 u_0 为 u 的取值下界,则

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = a(u)\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial\varphi}{\partial y} = a(u)\frac{\partial u}{\partial y};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = a(u)\frac{\partial u}{\partial t} \tag{3}$$

初边值问题(1) 式可化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - D\Delta\varphi = f(x,y,t) & (x,y)\in\Omega\cup\Omega'\subset\mathbf{R}^2, t\in\mathbf{I} \\ \varphi(x,y,t) = \bar{\varphi}(x,y,t) & (x,y,t)\in\Gamma\times\mathbf{I} \\ \varphi(x,y,0) = \varphi_0(x,y) = K(u_0) & (x,y)\in\mathbf{R}^2 \end{cases} \tag{4}$$

大多数情况下,材料系数 $a(u)$并不能以解析形式表出,而是呈现离散点的形式。通常可用分段线性插值得到 $a(u)$的近似表达式[3]。(不同情形下可用不同的插值方式)

设有离散点(或称实验点)(u_i,a_i),$i=0,1,2,\cdots,N$,其分段线性插值为

收稿日期:2000-03-23
作者简介:冀礼鹏(1957-),男,陕西宝鸡人,讲师,主要从事计算数学及应用数学研究.

$$a(u) = a_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{u_{i+1} - u_i}(u - u_i) \qquad u_i \leqslant u \leqslant u_{i+1};\quad i = 1,2,\cdots,N-1 \tag{5}$$

$$\varphi = K(u) = \varphi_i + a_i(u - u_i) + \frac{a_{i+1} - a_i}{2(u_{i+1} - u_i)}(u - u_i)^2$$
$$u_i \leqslant u \leqslant u_{i+1};\quad i = 1,2,\cdots,N-1 \tag{6}$$

$$\varphi_i = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{2}(u_{j-1} - u_j)(a_{j-1} + a_j);\quad i = 1,2,\cdots,N-1 \tag{7}$$

由此可知，经过 Kirchhoff 积分变换，变量 φ 是 u 的二次函数，且满足逆变换

$$u=K^{-1}(\varphi)=u_i-\frac{a_i}{a_{i-1}-a_i}(u_{i+1}-u_i)+\frac{u_{i+1}-u_i}{a_{i+1}-a_i}\sqrt{a_i^2+2\frac{a_{i+1}-a_i}{u_{i+1}-u_i}(\varphi-\varphi_i)} \qquad i=1,2,\cdots,N-1 \tag{8}$$

不难验证，由分段线性插值决定的 Kirchhoff 变换(6)式和其逆变换(8)式单且满。

2　边界积分方程与变分方程

考察初边值问题(4)式，由文献[4]有

定理 1　如果 $\bar{\varphi}=K(\bar{u})\in L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})$，$f\in L^2(H^1(\mathbf{R}^2),\mathbf{I})$，$\varphi_0=K(u_0)\in L^2(\mathbf{R}^2)$，则在 $\varphi\in H(\mathbf{I}\times\mathbf{R}^2)$（$H=\{\varphi:\varphi\in L^2(H^1(\mathbf{R}^2),\mathbf{I}),\frac{\partial\varphi}{\partial t}\in L^2(H^{-1}(\mathbf{R}^2),\mathbf{I})\}$）上初边值问题(4)有唯一解，且满足边界积分方程

$$\varphi(X,t) = \int_{\mathbf{R}^2}\varphi_0(Y)\varphi^*(X-Y,t)\mathrm{d}\Omega_Y + \int_0^t\int_{\mathbf{R}^2}f(Y,\tau)\varphi^*(X-Y,t-\tau)\mathrm{d}\Omega_Y\mathrm{d}\tau$$
$$+ D\int_0^t\int_{\Gamma_y}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]\varphi^*(X-Y,t-\tau)\mathrm{d}\Gamma_y\mathrm{d}\tau \qquad (X,t)\in\Gamma\times\mathbf{I} \tag{9}$$

其中 $X\in\Gamma\subset\mathbf{R}^2$，$Y\in\mathbf{R}^2$，是二维平面上的点，$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]=\frac{\partial\varphi}{\partial n^-}-\frac{\partial\varphi}{\partial n^+}$，$n^-$，$n^+$ 分别表示边界 Γ 上点的单位内、外法向量，φ^* 为基本解

$$\varphi^*(X-Y,t-\tau) = \frac{1}{4\pi(t-\tau)}\exp\left[-\frac{|X-Y|^2}{4(t-\tau)}\right] \tag{10}$$

其中，$|X-Y|$ 表示 $\mathbf{R}^2$ 中两点的欧氏模。

由定理 1，令 $\lambda(X,t)\in L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})$，则可得边界变分问题。

求 $\lambda(X,t)\in L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})$，满足

$$b(\lambda,\mu) = <\bar{\varphi}_0,\mu> \qquad \forall\ \mu\in L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I}) \tag{11}$$

$$b(\lambda,u) = D\int_0^T\int_0^t\int_{\Gamma_X}\int_{\Gamma_Y}\lambda(Y,\tau)\mu(X,t)\varphi^*(X-Y,t-\tau)\mathrm{d}\Gamma_X\mathrm{d}\Gamma_Y\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \tag{12}$$

$$\bar{\varphi}_0 = \bar{\varphi}(X,t) - \int_{\mathbf{R}^2}\varphi_0(Y)\varphi^*(X-Y,t)\mathrm{d}\Omega_Y - \int_0^t\int_{\mathbf{R}^2}f(Y,\tau)\varphi^*(X-Y,t-\tau)\mathrm{d}\Omega_Y\mathrm{d}\tau \tag{13}$$

$$<\bar{\varphi}_0,\mu> = \int_0^T\int_\Gamma\bar{\varphi}_0\mu\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t \tag{14}$$

由文献[5]不难得到

定理 2　通过 Kirchhoff 积分变换(6)和逆变换(8)，决定了 $\varphi\in H(\mathbf{I}\times\mathbf{R}^2)\rightarrow\mu\in H(\mathbf{I}\times\mathbf{R}^2)$ 同构映射。

定理 3　变分方程(11)构成 $\lambda\in L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})\rightarrow\mu\in L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times\mathbf{I})$ 的同构映射。

定理 4　在定理 1 条件下，变分方程(11)存在唯一解 $\lambda(X,t)\in L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})$，且

$$\|\lambda\|_{L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})} \leq \frac{1}{M\|\bar{\varphi}_0\|_{L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})}} \tag{15}$$

证明：令

$$E(\varphi,v) = D\int_{\mathbf{R}^2}\nabla\varphi\nabla v\mathrm{d}\Omega \tag{16}$$
$$v\in H(\mathbf{I}\times\mathbf{R}^2)\ \text{且}\ v(X,T)=0, X\in\mathbf{R}^2,$$

对任意的 $\lambda \in L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})$ 求 $\varphi \in H(\mathbf{I}\times\mathbf{R}^2)$ 满足

$$\int_0^T\left[\int_{\mathbf{R}^2} D\nabla\varphi\nabla v\mathrm{d}\Omega - \int_{\mathbf{R}^2}\varphi\frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}\Omega\right]\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Gamma \lambda v\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t \tag{17}$$

由定理 1,(17) 式在 $H(\mathbf{I}\times\mathbf{R}^2)$ 中有唯一解 v_μ,且满足

$$\begin{cases}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial t}v\mathrm{d}\Omega + \int_{\mathbf{R}^2}D\nabla\varphi_\mu\cdot\nabla v\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma\lambda v\mathrm{d}\Gamma \\ \varphi_\mu(X,0) = 0 \qquad X\in\mathbf{R}^2\end{cases} \tag{18}$$

取 $v=\varphi_\mu$,由迹定理有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varphi_\mu\|^2_{L(\mathbf{R}^2)} + C_1\|\varphi_\mu\|^2_{H^1(\mathbf{R}^2)} \le C_2\|\lambda\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\|\varphi_\mu\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$
$$\le C_3\|\lambda\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\|\varphi_\mu\|_{H^1(\mathbf{R}^2)}$$

由于 $$\|\varphi_\mu\|_{H^1(\mathbf{R}^2)} \le C\|\lambda\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \qquad \|\varphi_\mu\|_{H(\mathbf{I}\times\mathbf{R}^2)} \le C\|\lambda\|_{L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})}$$
$$C_1\|\varphi_\mu\|_{L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})} \le \|\lambda\|_{L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})} \le C_2\|\varphi_\mu\|_{L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})}$$

因此 $$|b(\lambda,\lambda')| = \left|\int_0^T<\varphi_\mu,\lambda'>dt\right| \le \|\varphi_\mu\|_{L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})}\|\lambda\|_{L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})}$$
$$\le C\|\lambda\|_{L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})}\|\lambda\|_{L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})}$$

而 $|b(\lambda,\lambda')| \ge \|\varphi_\mu\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} + C_1\int_O^T\|\varphi_\mu\|_{H^1(\mathbf{R}^2)}\mathrm{d}t$
$$\ge C_1\int_0^T\|\varphi_\mu\|_{H^1(\mathbf{R}^2)}\mathrm{d}t \ge C_2\|\varphi_\mu\|_{L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})} \ge 2\|\lambda\|_{L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})}$$

因此 $b(\lambda,\lambda')$ 在 $L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})\times L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})$ 上是连续双线性的,且不难验证 $\bar{\varphi}_0\in L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})$。由 Lax-milgram 定理,变分方程(11)有唯一解 $\lambda\in L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})$,且由文献[6]有

$$\|\lambda\|_{L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})} \le \frac{1}{M\|\bar{\varphi}_0\|_{L^2(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbf{I})}} \qquad M>0$$

参考文献:

[1] Bialecki R, Nowak A J. Boundary Value problems in heat conduction with nonlinear material and nonlinear boundary conditions[J]. Apps Math Modelling, 1981, 30(5), 417-421.

[2] Skerget P, Brebbia C A. In Progress in Boundary Element Methods[M]. London·Pentech Press, 1983.

[3] 王世儒,王金金,冯有前,等. 计算方法[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,1996.

[4] Frideman, Partial A Differential Equations of Parabolic[M]. New York: Type Prentice-Hall, 1994.

[5] 余德浩. 自然边界元方法的数学理论[M]. 北京:科学出版社,1993.

[6] 李炳杰,一类反应扩散方程的边界元分析[J]. 兰州大学学报(自然科学版)2000, 36(4), 16-19.

Boundary integral formulation for a class of nonlinear parabolic equations

JI Li-peng, LI Bing-jie

(The Telecommunication Engineering Institute, AFEU, Xi'an 710077, China)

Abstract: By the Kirchhoff integral transformation, a class of nonlinear parabolic equations can be converted to a class of linear one, A boundary integral equation for the linear one and a boundary variational formulation are presented. In addition to the indication of existence and uniqueness of the solution of this equation using lax-milgram theorem, the Kirchhoff integral transformation in the nonlinear coefficient based on a set of discrete data is given by a piece wise linear polynomial.

Key words·Kirchhoff integral transformation; boundary integral equation; boundary variational equation; lax-milgram theorem