第1卷第5期　　空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)　　Vol. 1 No. 5
2000年12月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Dec. 2000

不可约关系的幂

孔令继
(空军工程大学 工程学院，陕西 西安 710038)

摘　要：研究了有限集$\underline{X}$上的不可约二元关系ρ的性质，证明了其含有唯一的传递关系，同时证明了$\rho^k\cup\rho^{k+1}\cup\cdots\cdots\cup\rho^{k+d-1}=\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cdots\cup\rho^n=\underline{X}\times\underline{X}$。

关键词：不可约关系；传递关系；幂
中图分类号：O152.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-3516(2000)05-0082-02

设ρ是有限集$\underline{X}$上的一个二元关系，考虑序列

$$\rho,\rho^2,\rho^3,\cdots\cdots \tag{1}$$

$\rho^i\in B_{\underline{X}}(i=1,2,\cdots)$，$B_{\underline{X}}$是有限半群知，序列(1)只能含有限个不同元，若$k=k(\rho)$是满足$\rho^k=\rho_l(>k)$的最小整数，同时$l=k+d(d\geqslant 1)$是满足此条件的最小整数。由$\rho^k=\rho^{k+d}$可知$\rho^{k+1}=\rho^{k+d+1}$，$\rho^{k+2}=\rho^{k+d+2}$，$\cdots$，$\rho^{k+d}\rho^{k+2d}$，从而序列(1)成为：

$$\rho,\rho^2,\cdots,\rho^{k-1}|\rho^k,\cdots,\rho^{k+d-1}|\rho^k,\cdots,\rho^{k+d-1}|\cdots\cdots$$

由半群基本理论知，$G(\rho)=\{\rho^k,\rho^{k-1},\cdots,\rho^{k+d-1}\}$是一个循环群，令$G(\rho)$的单位元素为$\rho^r(k\leqslant r\leqslant r+d-1)$。由于$\rho^r$是幂等元，故如果$\beta$是由$k\leqslant\beta d\leqslant k+d-1$唯一确定的整数，则$r=\beta d$。

用$t(t\geqslant 1)$表示使得ρ^s是传递的最小整数$s(\geqslant 1)$，即$\rho^{2s}\subset\rho^s$，这样的t当然存在，且$t\leqslant r$。

引理1　若ρ为$\underline{X}$上的二元关系，则

$$\rho^r=\bigcap_s\rho^s(\rho^s\text{是传递关系})$$

证明　若ρ^s是一个传递关系，则序列$\rho^s,\rho^{2s},\cdots$含有唯一的幂等元，即ρ^r，故有一正整数乙，使得$\rho^{vs}=\rho^r$，由传递性

$$\rho^r=\rho^{vs}\subset\cdots\cdots\subset\rho^{2s}\subset\rho^s$$

知$\rho^r\subset\rho^s$，又ρ^r是传递关系，$\bigcap_s\rho^s\subset\rho^r$。故$\rho^r=\bigcap_s\rho^s(\rho^s$是传递关系)。

引理2　如果ρ是$\underline{X}$上的不可约二元关系，且ρ是传递的，$\Pi(\rho)=\underline{X}$，则$\Delta\underline{X}=\{(a_i,a_i)|a_i\in\underline{X}\}\subset\rho^s$。

证明　设$a_i\in\underline{X}$，即$(a_i,a_i)\in\Delta\underline{X}$，则有一$h_i$，$1\leqslant h_i\leqslant n=\underline{X}$，使得$(a_i,a_i)\in\rho^{h_i}$；对于正整数$l>0$，有$(a_i,a_i)\in\rho^{h_il}$，当$k$充分大时$(\rho^{h_i})^k\in G(\rho)$，$\{(\rho^{h_i})^k|k=1,2,\cdots\}$中含有幂等元，从而$\rho^r$是$\rho^{h_i}$的某次幂，我们有$(a_i,a_i)\in\rho\beta\alpha r$。由引理1，$(a_i,a_i)\in\rho^s$，又由$a_i$的任意性，$\Delta\underline{X}\subset\rho^s$。

定理1　若ρ是不可约关系，则$\rho,\rho^2,\rho^3,\cdots\cdots$中含有唯一的传递关系，即$\rho^r$。

证明　设ρ^s是传递的，不妨令$\Pi(\rho)=\underline{X}$，由引理2，$\Delta\underline{X}\subset\rho_s$。因此$\rho^s=\rho^s\cdot\Delta\underline{X}\subset\rho^s\cdot\rho^s=\rho^{2s}$，又由传递性$\rho^{2s}\subset\rho^s$，故$\rho^s=\rho^{2s}$，既然$\rho,\rho^2,\rho^3,\cdots\cdots$中仅含有一个幂等元，我们有$\rho^r=\rho^s$。

引理3　设$|\underline{X}|=n$，ρ为$\underline{X}$上不可约二元关系，$\Pi(\rho)=\underline{X}$，则$\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cup\rho^n=\rho^{l+1}\cup\rho^{l+2}\cup\cdots\cup\rho^{l+n}$($l$为任意正整数)。

证明　由于ρ是不可约的，故

$$\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cup\rho^n=\underline{X}\times\underline{X}$$

从而对于任意$a_i\in\underline{X}$，有

$$a_i(\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cup\rho^n)=\underline{X}$$

收稿日期：2000-01-15
作者简介：孔令继(1963-)，男，安徽合肥人，讲师，密执根州立大学在读博士，主要从事泛函研究.

又 $pr_1(\rho)=pr_2(\rho)=\Pi(\rho)$，故 $a_i\rho$ 非零，所以

$$a_i\rho(\rho\cup\rho^2\cup\rho^n)=\underline{X}$$

即　$a_i(\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cup\rho^n=ai\rho(\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cup\rho^n)$

由 a_i 的任意性　$\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cup\rho^n=\rho(\rho\cup\rho^2\cup\cdots\rho^n)$

由此可知　$\rho\cup\rho^2\cup\cdots\rho^n=\rho^{l+1}\cup\rho^{l+2}\cup\cdots\cup\rho^{l+n}$　（l 为任意正整数）

定理 2　设 $|\underline{X}|=n$，ρ 为 $\underline{X}$ 上的不可约关系，$\Pi(\rho)\underline{X}$，则 $\rho^k\cup\rho^{k+1}\cup\cdots\cup\rho^{k+d-1}=\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cup\rho^n=\underline{X}\times\underline{X}$。

证明　由引理 3，我们有

$$(\rho^k\cup\rho^{k+1}\cup\cdots\cup\rho^{k+d-1})(\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cup\rho^n)=$$
$$\rho^k(\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cup\rho^n)\cup\rho^{k+1}(\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cup\rho^n)\cup\cdots\cdots\cup\rho^{k+d-1}(\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cup\rho^n)=$$
$$\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cup\rho^n$$

同时又有

$$(\rho^k\cup\rho^{k+1}\cup\cdots\cup\rho^{k+d-1})(\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cup\rho^n)=$$
$$(\rho^k\cup\rho^{k+1}\cup\cdots\cup\rho^{k+d-1})\rho\cup(\rho^k\cup\rho^{k+1}\cup\cdots\cup\rho^{k+d-1})\rho^2\cup\cdots\cdots\cup(\rho^k\cup\rho^{k+1}\cup\cdots\cup\rho^{k+d-1})\rho^n=$$
$$\rho^k\cup\rho^{k+1}\cup\cdots\cup\rho^{k+d-1}$$

因此我们有

$$\rho^k\cup\rho^{k+1}\cup\cdots\cup\rho^{k+d-1}=\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cup\rho^n=\underline{X}\times\underline{X}$$

参考文献：

[1] Schwarz S. On the Semigroup of Binary Relations on a finite Set[J]. Czech Math, 1970, 20(95): 632 - 679.
[2] Schwarz S. On Idempotent Binary Relations on a finite Set[J]. Czech Math, 1970, 20(95): 692 - 702

Powers of an Irreducible Relation

KONG Ling-ji
(Engineering Institute, AFEU., Xi'an 710038, China)

Abstract: The property of the irreducible binary relation ρ on a finite set $\underline{X}$ is studied. The unique transitive relation is demonstrated and $\rho^k\cup\rho^{k+1}\cup\cdots\cup\rho^{k+d-1}=\rho\cup\rho^2\cup\cdots\cup\rho^n=\underline{X}\times\underline{X}$ is also proved.

Key words: irreducible relation; transitive relation; power