一类超双曲型方程基本解的结构及其应用

董福安[1]， 王国正[2]
(1. 空军工程大学 工程学院，陕西 西安 710038；2. 空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安 710077)

摘 要:主要对多复变函数论中提出的一偏微分方程组中各方程线性组合方程的基本解的结构进行了研究,给出了方程组各方程的特征角面函数与基本解之间的关系。考查了线性组合方程的解在特征角面顶点的值,并给出了柯西问题解对初值的必要条件。

关键词:特征角面函数;基本解;基本公式
中图分类号:O175　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2000)04-0068-03

1 基本解的构造

由多复变函数论中提出的一偏微分方程组[1]

$$\begin{cases} u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0 & (1) \\ u_{x_3x_3} + u_{x_4x_4} = 0 & (2) \\ u_{x_1x_4} - u_{x_3x_2} = 0 & (3) \\ u_{x_1x_3} + u_{x_2x_4} = 0 & (4) \end{cases}$$

容易得到方程(1)、(2)、(3)、(4)的特征角面函数分别为

$$\Gamma_1 = (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2$$
$$\Gamma_2 = (x_3 - x_3^0)^2 + (x_4 - x_4^0)^2$$
$$\Gamma_3 = 4[(x_1 - x_1^0)(x_4 - x_4^0) - (x_2 - x_2^0)(x_3 - x_3^0)]$$
$$\Gamma_4 = 4[(x_1 - x_1^0)(x_3 + x_3^0) + (x_2 - x_2^0)(x_4 - x_4^0)]$$

记此方程组各方程的线性组合方程为

$$F(u) = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - l_1(u_{x_3x_3} + u_{x_4x_4}) + l_2(u_{x_1x_4} - u_{x_3x_2}) + l_3(u_{x_1x_3} + u_{x_2x_4}) \tag{5}$$

其中 l_1, l_2, l_3 为常数($l_1>0$),方程(5)显然为超双曲型方程。

定理1 方程(5)的特征角面函数是方程(1)、(2)、(3)、(4)的特征角面函数的一个线性组合,即

$$\Gamma = \frac{1}{4l_1 + l_2^2 + l_3^2}[4l_1\Gamma_1 - 4\Gamma_2 + l_2\Gamma_3 + l_3\Gamma_4]$$

证明 注意到 Γ 所满足的方程为

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}\right)^2 - l_1\left[\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_4}\right)^2\right] + l_2\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_4} - \frac{\partial\Gamma}{\partial x_3}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}\right) + l_3\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_3} + \frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_4}\right) = 4\Gamma \tag{6}$$

此方程相应的 Darboux 问题的解是[2]

$$x_1 - x_1^0 = \pi_1^0 s + \frac{l_3}{2}\pi_3^0 s + \frac{l_2}{2}\pi_4^0 s$$
$$x_2 - x_2^0 = \pi_2^0 s - \frac{l_2}{2}\pi_3^0 s + \frac{l_3}{2}\pi_4^0 s$$
$$x_3 - x_3^0 = \frac{l_3}{2}\pi_1^0 s - \frac{l_2}{2}\pi_2^0 s - l_1\pi_3^0 s$$

收稿日期:2000-01-11
作者简介:董福安(1958-),男,天津市人,副教授,主要从事偏微分方程定性问题的研究.

$$x_4 - x_4^0 = \frac{l_2}{2}\pi_1^0 s + \frac{l_3}{2}\pi_2^0 s - l_1\pi_4^0 s$$

则有

$$\pi_1^0 s = \frac{4}{4l_1 + l_2^2 + l_3^2}\left[l_1(x_1 - x_1^0) + \frac{l_3}{2}(x_3 - x_3^0) + \frac{l_2}{2}(x_4 - x_4^0)\right]$$

$$\pi_2^0 s = \frac{4}{4l_1 + l_2^2 + l_3^2}\left[l_1(x_2 - x_2^0) - \frac{l_2}{2}(x_3 - x_3^0) + \frac{l_3}{2}(x_4 - x_4^0)\right]$$

$$\pi_3^0 s = \frac{4}{4l_1 + l_2^2 + l_3^2}\left[\frac{l_3}{2}(x_1 - x_1^0) - \frac{l_2}{2}(x_2 - x_2^0) - (x_3 - x_3^0)\right]$$

$$\pi_4^0 s = \frac{4}{4l_1 + l_2^2 + l_3^2}\left[\frac{l_2}{2}(x_1 - x_1^0) + \frac{l_2}{2}(x_2 - x_2^0) - (x_4 - x_4^0)\right]$$

把值代入 Darboux 问题的参数应满足的条件

$$(\pi_1^0 s)^2 + (\pi_2^0 s)^2 - l_1[(\pi_3^0 s)^2 + (\pi_4^0 s)^2] + l_2[\pi_1^0 s \cdot \pi_4^0 s - \pi_3^0 s \cdot \pi_2^0 s] + l_3[\pi_1^0 s \cdot \pi_3^0 s + \pi_2^0 s \cdot \pi_4^0 s] = \Gamma$$

整理得到

$$\Gamma = \frac{1}{4l^1 + l_2^2 + l_3^2}[4l_1\Gamma_1 - 4\Gamma_2 + l_2\Gamma_3 + l_3\Gamma_4]$$

定理 2　方程(5)的基本解是特征角面函数的倒数。

证明　由于方程(5)是常系数也是自伴的，只需求形如 $u = f(\Gamma)$ 的解。由于 $u_{x_i} = f'(\Gamma)\Gamma\ x_i$，$u_{x_ix_j} = f''(\Gamma)\Gamma_{x_i}\Gamma_{x_j} + f'(\Gamma)\Gamma_{x_ix_j}$，将 $u = f(\Gamma)$代入(5)，并注意到(6)式，经整理得到

$$f''(\Gamma) \cdot 4\Gamma + 8f'(\Gamma) = 0$$

不难解得其基本解为

$$u = f(\Gamma) = \frac{1}{\Gamma}$$

2　解的明显公式

定理 3　设 $G(a)$为由特征锥面 Γ 和初始空向超曲面 S 所围成的区域，$a = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$为特征锥的顶点($S$ 不过 a 点)，u 是方程(5)在 $G(a)$内的正规解，则有

$$-Cu(a) = pf\int_{S_a}\left(\Gamma^{-1}\frac{du}{dv} - u\frac{d\Gamma^{-1}}{dv}\right)dS \tag{7}$$

其中 C 为非零常数，它可以由一初等函数的重积分所确定，“pf”表示取瑕积分的有限部分，S_a 为 $G(A)$的边界曲面。

证明　现挖去以 a 为心，$\varepsilon(\varepsilon > 0)$为半径的小球，球的边界记为 Σ，设 $G(a)$挖去小球后的区域记为 $G'(a)$，如图 1 所示，在 $G''(a)$上应用基本公式[2]，则有

$$0 = pf\int_{G''(a)}[\Gamma^{-1}F(u) - uF(\Gamma^{-1})]dV = -pf\int_{S_a+\Sigma+\Gamma}\left[\Gamma^{-1}\frac{du}{dv} - u\frac{d\Gamma^{-1}}{dv}\right]dS$$

容易得到

$$\int_{\Gamma}\left[\Gamma^{-1}\frac{du}{dv} - u\frac{d\Gamma^{-1}}{dv}\right]dS = 0$$

且当 $\Sigma \to a$ 时，有

$$pf\int_{\Sigma}\Gamma^{-1}\frac{du}{dv}dS = 0$$

注意到

$$\frac{d\Gamma^{-1}}{dv} = -\Gamma^{-2}\frac{d\Gamma}{dv} = -\Gamma^{-2}\sum_{i=1}^{4}2s\pi_i\frac{dx_i}{ds}$$

则

$$pf\int_{\Sigma}u\frac{d\Gamma^{-1}}{dv}dS = -pf\int_{\Sigma}P^{-2}2su\frac{D(x_1,x_2,x_3,x_4)}{D(s,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3$$

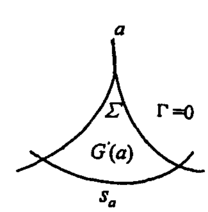

图 1　球域示意图

由于 u 是正规函数，被积函数分子、分母与 s^4 同级，用 $u - u(a) + u(a)$代替 u，当 $\Sigma \to a$ 时，$|u - u(a)| \to 0$，则有

$$pf\int_{\Sigma} u \frac{\mathrm{d}\Gamma^{-1}}{\mathrm{d}v}\mathrm{d}S = u(a) \cdot pf\int_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}\Gamma^{-1}}{\mathrm{d}v}\mathrm{d}S$$

所以

$$-Cu(a) = pf\iint_{S_a}\left[\Gamma^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} - u\frac{\mathrm{d}\Gamma^{-1}}{\mathrm{d}v}\right]\mathrm{d}S$$

其中

$$C = -\lim_{\Sigma \to a} pf\int_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}P^{-1}}{\mathrm{d}v}\mathrm{d}S$$

定理 4 如果 $u \in G(a)$,u 是方程(5)在 $G(a)$ 内的正规解,那么,解对初值的必要条件为

$$(1) \quad -Gu_{x_i}(a) = pf\iint_{S_a}\left[\Gamma^{-1}\frac{\mathrm{d}u_{x_i}}{\mathrm{d}v} - u_{x_i}\frac{\mathrm{d}\Gamma^{-1}}{\mathrm{d}v}\right]\mathrm{d}S$$

$$(2) \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}N}\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

其中$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}$表示 S_a 上的补法线微商,$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}N}$表示 S_a 的法线方向余弦。

参考文献:

[1] 凌 岭.多变函数论中的偏微分方程组[J].西北大学学报,1993,6:491-495.

[2] 凌 岭.超双曲型方程[M].西安:西北大学出版社,1987.

The Structure of Elementary Solution for a Ultra-hyperbolic Equation and Its Application

DONG Fu-an[1], WANG Guo-zheng[2]

(1. The Engineering Institute,AFEU.,Xi'an 710038,China;

2. The Telecommun ication Engineering Institute,AFEU.,Xi'an 710077,China)

Abstract:The structure of elementary solution for Linear combination equation of a system of partial differential equation in the theory of several complex variables is discussed. The relation between the characteristic conoid and the elementary solution in the equations is given. The value of solution for the linear equation at the conic point is derived,and the necessary condition satisfied by the Cauchy's problem solution is given.

Key words:characteristic conoid function;elementary solution;elementary formula