

复解析子波的一种简单构造方法

袁 晓, 王晟达

(空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

摘 要:首先讨论并给出复解析子波构造条件,在综合 Bubble 子波和超高斯谱子波构造基础上,提出一类新的复解析子波函数,该类子波在频域具有简明的解析表达式,然后从频域和时域两方面对新的子波性能进行了研究。根据本文的构造方法,调整少量的几个耦合性较弱的控制参量,可得到许多具有不同性能的子波函数。

关键词:解析信号;子波构造;时频特性;品质因数

中图分类号:TN911 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2000)04-0024-04

在信号分析和处理领域,一个经久不衰和引人入胜的课题是,从一个(实)信号中测定和分析其幅度与相位^[1~4]。一般说来,这个问题存在许多解法^[1],但最根本的一点却是相同的,即由原信号生成或定义一个(线性)解析信号。解析信号在通讯、广播、地震勘探、雷达和测量等实际系统中是一个重要的概念;同时解析信号也是信号分析的有效工具^[5~6]。幅度和瞬时频率描述和刻画信号的局部行为特征,也关联着如象 Wigner-Ville 分布和其它众多的 Choen 类分布的局域矩性质^[6]。特别是在多成份信号(如象湍流、语音和混沌等信号)分析中,瞬时频率和相位提取、处理更具有实际的应用价值。

对于信号的解析分析,最常用的方法是采用 Hilbert 变换(HT)将原信号变换成解析信号^[5~7]。HT 方法对窄带信号的解析分析是十分有效的,但对时变宽带信号则存在一些固有缺陷^[1,7~9],如用 HT 方法提取语音信号包络将产生不光滑的毛刺^[9]。为克服 HT 方法的缺陷,文献[1]中提出了同态解析分析方法;文献[7,9]提出了复解析子波变换(CAWT)方法,该方法在保留 HT 方法的精华同时,又融合进子波分析的优势^[4,7~11]。CAWT 方法的一个关键问题是如何构造适当的复解析子波函数以满足不同性能信号的解析分析。

1 实信号的复解析子波分析

1.1 线性解析信号

假设 $s(t)$ 是一个广义的信号,其频谱(即 Fourier 变换) $S(\omega)$ 可写成正频和负频两部分之和

$$S(\omega) = U(\omega)S(\omega) + U(-\omega)S(\omega) \tag{1}$$

式中 $U(\cdot)$ 是单位阶跃函数。上式在时域的等价形式为^[1]

$$s(t) = \frac{1}{2}[s(t) + i\check{s}(t)] + \frac{1}{2}[s(t) - i\check{s}(t)] \tag{2}$$

式中 $\check{s}(t)$ 是 $s(t)$ 的 Hilbert 变换。因此在时域信号被分解成两部分:解析项(analytic term) $\frac{1}{2}[s(t) + i\check{s}(t)]$ 和反解析项(antianalytic term) $\frac{1}{2}[s(t) - i\check{s}(t)]$ 。一般情况下,这两部分是不相同的,但如果 $s(t)$ 是实的,即 $s(t) = s_r(t)$,则频谱满足 Hermitian 关系: $S_r(-\omega) = S_r^*(\omega)$,此时式(2)右边的两项中必有一项是冗余的。如果反解析成分是共轭的,其频谱是解析项的反转和共轭,则两项之和就形成一个线性信号^[1]。

$$\check{S}_r^*(t) = s_r(t) + i\check{s}_r(t) = A(t)\exp(i\theta(t)) \tag{3}$$

式中 $A(t) = |\check{S}_r^*(t)|$ 定义为信号幅度,相位 $\theta(t)$ 的导数定义为信号的瞬时角频率 $\beta(t)$,即

$$\beta(t) := d\theta(t)/dt = \theta'(t) \tag{4}$$

1.2 复解析子波分析

采用子波方法对实信号 $s_r(t)$ 进行线性解析分析,在尺度 $a(>0)$ 下的线性解析形式定义为

$$\hat{S}_r^+(a, t) := s_r(t) * \Psi_a(t) \tag{5}$$

式中子波 $\Psi_a(t) = a^{-1/2} \Psi(t/a)$, 因此母函数 $\Psi(t)$, 除满足允许性条件外, 还必须是解析的, 即满足解析条件

$$\begin{cases} \Psi(t) = \Psi_r(t) + i\Psi_i(t) \\ \Psi_i(t) = \check{\Psi}_i(t) := \frac{1}{\pi t} * \Psi_r(t) \end{cases} \tag{6a}$$

在频域等价于

$$\begin{cases} \hat{\Psi}(\omega) = 2\hat{\Psi}_r(\omega)U(\omega) \\ \hat{\Psi}_i(\omega) = \text{sgn}[\hat{\Psi}_r(\omega)] \end{cases} \tag{6b}$$

此时幅度和相位(在尺度 a 下)函数分别为

$$\begin{cases} A(a, t) = |\hat{S}_r^+(a, t)| = \{[s_r(t) * \Psi_{ra}(t)]^2 + [s_r(t) * \Psi_{ia}(t)]^2\}^{1/2} \\ \theta(a, t) = \arctan\left(\frac{s_r(t) * \Psi_{ia}(t)}{s_r(t) * \Psi_{ra}(t)}\right) \end{cases} \tag{7}$$

Morlet 母波 $\Psi_M(t)$ 是最常用到的复解析母波函数, 其严格定义由下式给出

$$\Psi_M(t) := \pi^{-1/4} (e^{-i\omega_0 t} - e^{-\omega_0^2/2}) e^{-t^2/2}$$

当 $\omega_0 \geq 5$ 时可近似表示为

$$\begin{cases} \Psi_M(t) \approx \pi^{-1/4} e^{-t^2/2 - i\omega_0 t} \\ \hat{\Psi}_M(\omega) \approx \sqrt{2} \pi^{1/4} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2}} \end{cases}$$

$\Psi_M(t)$ 是地球物理过程和流体湍流分析研究中经常使用的母波函数, 但无论 ω_0 取大取小都不严格满足解析条件式(6)。Morelet 母波频谱如图 1 所示。虽然 $\Psi_M(t)$ 严格满足允许性条件, 即 $\hat{\Psi}_M(0) = 0$, 但总是存在负频成分, 即有 $\hat{\Psi}_M(\omega)|_{\omega < 0} \neq 0$ 。

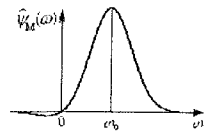


图 1 Morlet 母波频谱图

2 一类复解析子波函数的构造及性能研究

为能准确定位和检测实信号的奇异特征, 以及不失真地重构原信号, 对复解析母波 $\Psi(t)$ 仅仅要求满足允许性条件和解析条件是不够的, 通常还要求 $\Psi(t)$ 是线性相位或广义线性相位^[12], 最理想的情况是满足零

相位条件, 即

$$\arg[\hat{\Psi}(\omega)] = 0 \tag{8a}$$

结合式(6b)推知 $\Psi_r(t)$ 是实偶函数, $\Psi_i(t)$ 是实奇函数, 即在时域有

$$\begin{cases} \Psi_r(-t) = \Psi_r(t) \\ \Psi_i(-t) = -\Psi_i(t) \end{cases} \tag{8b}$$

根据解析条件和零相位条件, 仿照 Mexico 帽(或 Bubble)母波^[11,14]和基于超高斯谱子波^[4]的构造方法, 可立即写出一类复解析母波函数频谱为

$$\hat{\Psi}(\omega) := \begin{cases} A^{-1} \omega^k \exp(-\alpha |\frac{\omega}{\sigma}|^m) & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \tag{9}$$

式中 $A = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \omega^k \exp(-\alpha |\frac{\omega}{\sigma}|^m) d\omega$, α 和 σ 为谱形状控制常量。 m 控制 $\hat{\Psi}(\omega)$ 高频段的滚降性能, 在时域等价于 $\Psi(t)$ 的局域化特性。 $k > 0$ 控制着母波 $\Psi(t)$ 振荡性能。 $k = m = 2$ 时, 对应的就是复解析 Bubble 母波函数^[11]。

2.1 频域特性分析

式(9)给出的 $\hat{\Psi}(\omega)$ 只有一个极大峰值点, 对应的峰值角频率

$$\omega_p = \left(\frac{k}{m\alpha}\right)^{1/m} \sigma \tag{10}$$

取 $m=3.5, \alpha=\ln 2 \approx 0.69315$ 和 $\sigma=\pi$, 则 $\omega_p \sim k$ 曲线以及对应的 3dB 带宽 $W_{3dB} = \omega_h - \omega_l$ 曲线如图 2a 所示, 其中 ω_h 和 ω_l 分别表示 $\hat{\Psi}(\omega)$ 的上限和下限截止角频率, 其大于由方程(11)的解决定。

$$\omega^k \exp\left(-\alpha \left|\frac{\omega}{\sigma}\right|^m\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_p^k \exp\left(-\alpha \left|\frac{\omega_p}{\omega}\right|^m\right) \omega > 0 \quad (11)$$

设变量 $x = (\omega/\omega_p)^m$, 则方程(11)可简化为 $x - \ln x = 1 + (m/2k)\ln 2 \quad x > 0$

该方程是一个超越方程, 但可判断存在两个根 $x_1 < 1$ 和 $x_h > 1$, 并且 x_1 和 x_h 仅与参量 m 和 k 有关, 从而可写出带宽的表达式为 $W_{3dB} = \omega_h - \omega_l = (x_h^{1/m} - x_1^{1/m})\omega_p = (x_h^{1/m} - x_1^{1/m})\left(\frac{k}{m\alpha}\right)^{1/m}$ (12)

可见 $W_{3dB} \propto \sigma$, 即带宽可由形状参量 σ 独立控制。

众所周知, 子波变换时频窗口的自适应特性相当于恒品质因数 Q 滤波技术, 子波相当于一个恒 Q 带通滤波器, 因此 Q 值是一个重要的性能指标。实际上, 式(9)中的参量 α, σ, m 和 k 时 $\hat{\Psi}(\omega)$ 的影响都可归结到用品质因素 Q 来综合刻画:

$$Q: \frac{\omega_p}{W_{3dB}} = \frac{1}{x_h^{1/m} - x_1^{1/m}} = Q(m, k) \quad (13)$$

该式表明 Q 仅由 m 和 k 所决定, 而与 α 和 σ 无关。品质因数曲线如图 2(b) 所示。从该图看出, 当 m 固定时, Q 随 k 增加而升高; 当 k 固定时, Q 随 m 增加而提高。

2.2 频谱与时域波形

参量 k 在频域控制着 $\hat{\Psi}(\omega)$ 的性能指标 ω_p, W_{3dB} 和 Q , 在时域则表现为对 $\Psi(t)$, 波形的振荡性能控制。取 $\alpha=\ln 2, \sigma=\pi$ 和 $m=3.5$, 对应的频谱 $\hat{\Psi}(\omega)$ 和时域 $\Psi(t)$ 波形如图 3 所示。从该图看出, 随 k 的增加, $\Psi(t)$ 的支撑区间变化不大, 这是由于参量 m 和 α, σ 固定的缘故, 因此, 从直观上可得出结论: 参量 k 的主要作用是控制时域 $\Psi(t)$ 波形的振荡性能, 随 k 的增加, $\Psi(t)$ 的振荡变得愈来愈强烈。

对于 Morlet 母波 $\Psi_M(t)$, 当 $\omega_0 = 5.0$ 时, 可用图 3 中 $k=8.0$ 时所对应的母波 $\Psi(t)$ 来充分逼近。

从式(10)、(11)和(12)以及图 2(b) 直观地看出, 参量 m 对母波频域特性的控制作用比起参量 k 来说, 似乎更为复杂, 但从定义式(9)可看出参量 m 主要作用是控制 $\hat{\Psi}(\omega)$ 的滚降性能, 因此在时域表现为对 $\Psi(t)$ 波形的局域化特征控制。

取 $\alpha=\ln 2, \sigma=\pi$ 和 $k=2.0$, 当 $m=2.0, 4.0$ 和 6.0 时, 对应的频谱 $\hat{\Psi}(\omega)$ 和时域 $\Psi(t)$ 波形如图 4 所示。从该图可看出参量 m 对母波时、频局域化特征的强有力控制作用。当 $m=k=2.0$ 时, 对应的就是复 Bubble 母波^[11], 其实部就是有名的墨西哥帽子波。

3 结束语

本文给出了复解析子波的一种简单构造方法, 该方法的特点有:

(1) 频域, 母波频谱 $\hat{\Psi}(\omega)$ 具有简明的解析表达式。

(2) 新子波时、频特性可用四个参量灵活地控制参量 α 和 σ 主要是控制 $\hat{\Psi}(\omega)$ 的带宽和峰值角频率, 而与

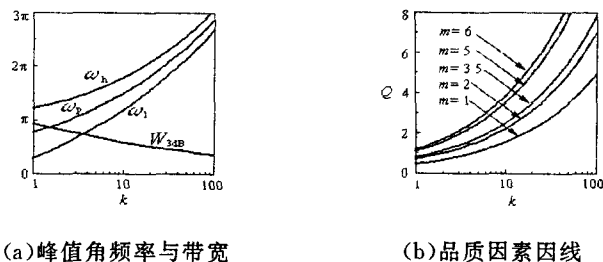


图 2 解析母波的频域特性

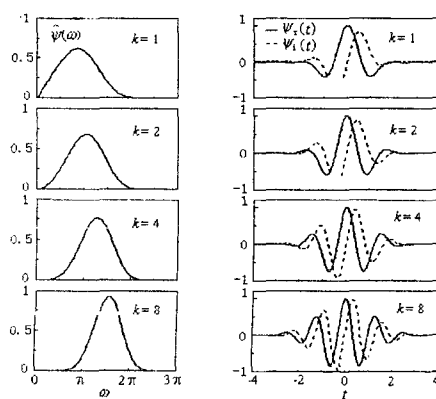


图 3 解析母波的频谱与时域波形

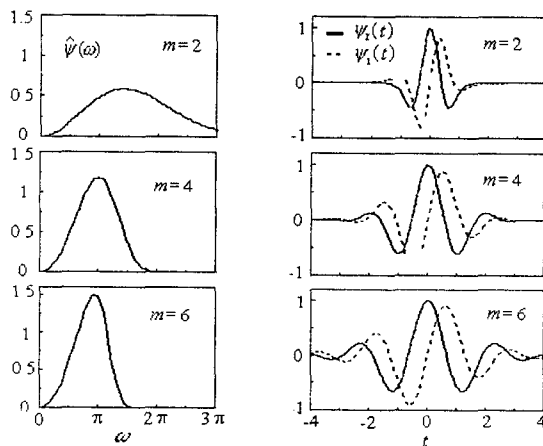


图 4 解析母波的频谱和时域波形 ($\alpha=\ln 2, \sigma=\pi$ 和 $k=2.0$)

品质因素无关,其实 α 和 σ 可归并成一个参量 $\omega_c = \alpha^{-1/m}\sigma$, 并且有 $\omega_p \propto \omega$, $W_{3dB} \propto \omega$, 因此我们可称 ω (或 α 与 σ) 为带宽控制参量。

参量 k 主要作用在时域表现为对 $\Psi(t)$ 波形振荡性强有力的控制, 因此我们可称 k 为振荡性参量;

参量 m 在频域主要表现为对 $\hat{\Psi}(\omega)$ 滚降性能的控制, 而对峰值角频率控制很弱, $\omega_p \propto m^{-1/m}$; 在时域表现为对 $\Psi(t)$ 波形衰减速度的控制, 也即 m 主要关联着 $\Psi(t)$ 的消失矩性质。

(3) 调整参量 α 、 σ 、 k 和 m 可得到许多不同性能的母波函数, 一些经典的母波函数可归结为本文新母波类中的一个特例。例如当 $k=m=2$ 时, 得到墨西哥帽母波和 Bubble 母波; Morlet 母波也可用本文方法来充分逼近; 当 $k=0$ 时, 就得到超高斯谱尺度函数(亦称父函数)。

参考文献:

- [1] Poletti M A. The homomorphic analytic signal[J]. IEEE Trans on SP, 1997, 45(8):1943-1953.
- [2] Delprat N. Global frequency modulation laws extraction from the Gabor transform of a signal; A first study of the interacting components case[J]. IEEE Trans on SAP, 1997, 5(1):64-71.
- [3] Choi A. Real-time fundamental frequency estimation by least-square fitting[J]. IEEE Trans on SAP, 1997, 5(2):201-205.
- [4] 袁晓. 子波算法、构造、解析子波变换及其在信号处理中的应用[D]. 成都: 电子科技大学, 1998.
- [5] 陈元亨. 信息与信号理论基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989.
- [6] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.
- [7] 张绪省, 朱贻盛, 成晓雄, 等. 信号包络提取方法—从 Hilbert 变换到小波变换[J]. 电子科学学刊, 1997, 19(1):120-123.
- [8] 袁晓, 刘光远, 邱玉辉, 等. 数字语音信号包络提取算法研究[J]. 计算机科学, 1998, 25(3):88-90.
- [9] 袁晓, 虞厥邦. 复解析子波变换与语音信号包络提取和分析[J]. 电子学报, 1999, 27(5):142-144.
- [10] Szu H H, Telfer B, Lohmann A. Causal analytical wavelet transform[J]. Opt Eng, 1992, 31(9):1825-1829.
- [11] 倪明, 蒋志平, 陆启生. 一种光学子波变换的改进[J]. 中国激光(A), 1997, 24(3):231-236.
- [12] 石卓尔, 保铮. 群归-复子波包处理[J]. 中国科学(E), 1997, 27(2):142-153.
- [13] 崔锦泰. 小波分析导论[M]. 西安: 西安交大出版社, 1995.
- [14] 袁晓, 虞厥邦. 基于 Bubble 函数的子波构造[J]. 信号处理, 1999, 15(1):37-41.

A Simple Method of Constructing Complex Analytic Wavelets

YUNA Xiao, WANG Sheng-da

(The Engineering Institute, AFEU., Xi'an 710038, China)

Abstract: A novel class of complex analytic wavelet functions, the wavelet having simple and explicit analytic expression in frequency domain, is presented based on the method of constructing Bubble wavelet and super-Gaussian spectrum wavelet. Firstly, the conditions of constructing complex analytic wavelets are discussed, and then the performance of the new wavelets is studied in frequency domain and time domain. According to the method of constructing wavelets, discussed in this paper, a number of complex analytic wavelet functions with different characteristics can be obtained through adjusting a few of control parameters with loose coupling.

Key words: analytic signals; construction of wavelet; time-frequency characteristics; quality factor